目　录

第一章　绪论…………………………………………………………（1）

§1.1　基本概念和符号…………………………………………（1）

§1.2　杨-米尔斯场的几何解释…………………………………（9）

§1.3　有规范场的动力学模型……………………………………（13）

第二章　用路经积分表示的量子理论……………………………（20）

§2.1　对相空间的路径积分………………………………………（20）

§2.2　全纯表象中的路径积分……………………………………（26）

§2.3　场论中 S 矩阵的生成泛函……………………………（32）

§2.4　对费米场的路径积分………………………………………（46）

§2.5　路径积分的微扰论性质……………………………………（56）

第三章　杨-米尔斯场的量子化……………………………………（67）

§3.1　杨-米尔斯场的拉格朗日及其量子化的特殊性质…………（67）

§3.2　杨-米尔斯场的哈密顿理论体系和它的量子化……………（69）

§3.3　协变量子化规则和费曼图方法……………………………（85）

§3.4　与物质场的相互作用………………………………………（98）

第四章　规范理论的重整化…………………………………………（113）

§4.1　最简单图形的例子…………………………………………（113）

§4.2　R 运算和抵消项…………………………………………（120）

§4.3　不变正规化　泡利-维拉方法………………………………（124）

§4.4　高阶协变导数方法…………………………………………（131）

§4.5　维数正规化…………………………………………………（138）

§4.6　广义瓦德恒等式……………………………………………（145）

§4.7　重整化作用量的结构………………………………………（155）

§4.8　重整化 S 矩阵……………………………………………（170）

§4.9　反常瓦德恒等式……………………………………………（178）

第五章　结论：一些应用……………………………………………（186）

§5.1　弱作用和电磁作用的统一模型……………………………（186）

§5.2　渐近自由　强作用的规范理论……………………………（194）

附录：文献索引、参考文献、记号…………………………………（204）

第一章 绪 论

§1.1 基本概念和符号

初看起来，我们在本书中将要讨论的规范场理论只包含相当窄的一类量子场论模型。然而目前越来越流行的一种看法是，这一理论有希望变成基本粒子理论的基础。根据是：

第一，得到实验完全证实的唯一理论（量子电动力学）是规范理论的一个特殊情况。

第二，弱作用的唯象模型在规范理论的框架内得到了一个精致而又自洽的表述。唯象的四费米子相互作用已被中间矢量粒子，即杨-米尔斯场的量子的相互作用所代替。对规范不变性的要求加上已有的实验数据，预言了弱中性流和一种新的强子量子数（粲数）。

第三，强作用的唯象夸克模型看来也是在规范理论的框架内有最自然的基础。在量子场论范围内，规范理论给出了描述渐近自由现象的唯一可能性。这种理论也有希望解释夸克囚禁，虽然这一问题目前还不十分清楚。

最后，规范原理的推广有可能将引力相互作用也放在杨-米尔斯场的普遍方案内。

因此，产生了在一个单一原理的基础上解释自然界存在的所有各种相互作用的可能性。以前不为人们所接受的"统一场论"这个词，现在在规范场论的框架内获得了新生。不论所有这些巨大的期望将可能实现到什么程度，今天杨-米尔斯场理论已经是理论物理的一个基本方法，而且无疑在未来的基本粒子理论中也将占有重要位置。

有许多科学家参与了这一理论的建立过程。

1953年，杨振宁和米尔斯首先将电荷相互作用的规范不变原理推广到同位旋相互作用的情况。他们提出了一种矢量场（后来被称为杨-米尔斯场），并且在经典场论的范围内研究了这种场的动力学。

1967年，法捷耶夫（Faddeev）和波波夫（Popov）以及德魏特（de Witt）建立了无质量杨-米尔斯场量子化的自洽方案。同年，温伯格（Weinberg）和萨拉姆（Salam）分别独立地提出了弱作用和电磁作用的统一规范模型。在这一模型中，电磁场和中间矢量玻色子场联合成为一个多重杨-米尔斯场。希格斯(Higgs)和基博（Kibble）最先提出用对称性自发破缺来产生矢量玻色子质量的机制，从而为上述弱电统一模型的建立奠定了基础。

1971年，特霍夫特（G. 't Hooft）证明了，无质量杨-米尔斯场量子化的普遍方法实际上能够不作任何改变地运用于对称性自发破缺的情况。这样就有了为有质量的矢量场建立自洽的量子理论的可能性，而这正是弱作用理论，特别是萨拉姆-温伯格模型所需要的。

截至1972年，在微扰论的框架内建立规范场量子理论的工作已大部分完成。在斯拉夫诺夫（Slavnov）、泰勒（Taylor）、李（B. W. Lee）和金-玖斯庭（Zinn-Justin）、特霍夫特和韦特曼（Veltman）等人的文章中，研究出了不变正规化的不同方法，得到了广义瓦德（Ward）恒等式，创立了微扰论的重整化方法。这样就为杨-米尔斯场建立了一个有限的么正的散射矩阵。

从那时以来，规范场理论在理论上和唯象学上发展都很快。这一发展史可在高能物理国际会议的报告中看到（李，1972，巴塔维亚；伊柳普洛斯（Illiopoulos），1974，伦敦；斯拉夫诺夫，1976，梯比里斯）。

现在，我们从简短的历史回顾转向描述杨-米尔斯场本身。先复习一下紧致李群理论中的某些概念。我们主要对这些群的李

代数感兴趣。设Ω为一个紧致半单李群，也就是一个没有不变可对易(阿贝尔)子群的紧致群。标志这个群的任一元素的独立参量数目(即维数)等于n。在这个群和它的李代数的各种表示之中有一个$n\times n$矩阵的表示（伴随表示），它由这个群通过相似变换

$$h\to\omega h\omega^{-1},\qquad h,\omega\in\Omega,\tag{1.1}$$

自然地作用在自身上而产生。在李代数的伴随表示中的任一矩阵$\mathscr{T}$能够表示为n个生成元的线性组合：

$$\mathscr{T}=T^a\alpha^a.\tag{1.2}$$

对我们来说，重要的是生成元T^a能按下述条件归一化：

$$\mathrm{tr}(T^aT^b)=-2\delta^{ab}.\tag{1.3}$$

在此情况下，在对易关系

$$[T^a,T^b]=t^{abc}T^c\tag{1.4}$$

中出现的结构常数t^{abc}完全反对称。对李群理论不熟悉的读者可以只记住这两个关系式，它们实际上是紧致半单李群的特征性质。

如果一个紧致半单群没有不变李子群，则它称为单纯群。一般的半单群是单纯群的积，这意味着李代数在伴随表示中的矩阵具有分块对角的形式，其中每一块对应一个单纯因子。我们可以适当地选择群的生成元，使每一生成元只在一块中有不为零的矩阵元。我们将总是这样与直积结构相应地选择生成元。

这种群的最简单例子是单纯群$SU(2)$。这个群的维数等于3，在伴随表示中，李代数由3×3反对称矩阵给出。作为生成元可选择如下矩阵

$$T^1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix};\quad T^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{pmatrix};\quad T^3=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\tag{1.5}$$

在这一基底中，结构常数t^{abc}就是完全反对称张量ε^{abc}。

除了半单紧致群外，我们也将遇到可对易（阿贝尔）群$U(1)$．这个群的元素是绝对值等于 1 的复数．这个群的李代数是一维的，它由虚数或 2×2 反对称实矩阵构成。

杨-米尔斯场可以与任何紧致半单李群相联系。它由在这个群的李代数中取值的矢量场$\mathscr{A}_\mu(x)$ 给出[注]。把 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 看成为在李代数的伴随表示中的矩阵是很方便的。在此情况下，它可用生成元 T^a 作为基底展开

$$\mathscr{A}_\mu(x)=A_\mu^a(x)T^a, \tag{1.6}$$

而场由展开式系数 $A_\mu^a(x)$ 确定。

在群 $U(1)$ 的情况下，电磁场 $\mathscr{A}_\mu(x)=iA_\mu(x)$ 是一个与此相类似的例子。

现在来定义规范群和它对杨-米尔斯场的作用。在电动力学中，规范变换实际上是熟知的梯度变换

$$\mathscr{A}_\mu(x)\longrightarrow\mathscr{A}_\mu(x)+i\partial_\mu\lambda(x). \tag{1.7}$$

让我们回顾一下它在经典场论中的起源。在电磁场和由复函数 $\psi(x)$ 所描述的荷电场相互作用的情况下，场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 总是以下述组合的形式出现在运动方程中：

$$\nabla_\mu\psi=(\partial_\mu-\mathscr{A}_\mu)\psi=(\partial_\mu-iA_\mu)\psi. \tag{1.8}$$

上述梯度变换保证了这一组合对场 ψ 的相位变换的协变性。如果 ψ 按照下述规则变换

$$\left.\begin{aligned}\psi(x)&\longrightarrow e^{i\lambda(x)}\psi(x),\\ \bar\psi(x)&\longrightarrow e^{-i\lambda(x)}\bar\psi(x),\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

则 $\nabla_\mu\psi$ 按同样的方式变换。实际上，有

$$\begin{aligned}(\partial_\mu-\mathscr{A}_\mu)\psi&\longrightarrow[\partial_\mu-i\partial_\mu\lambda(x)-\mathscr{A}_\mu(x)]e^{i\lambda(x)}\psi(x)\\ &=e^{i\lambda(x)}[\partial_\mu-\mathscr{A}_\mu(x)]\psi(x).\end{aligned} \tag{1.10}$$

[注] 按照这里用的符号，规范场用大花体$\mathscr{A}$表示，它按群生成元展开的分量则用斜体 A_μ^a 表示。但原书在后面的应用中，常将大花体印成斜体。译文中统一使用这里规定的符号，不再加注。 ——译者

其结果，运动方程也对于（1.7）式和(1.9)式协变。如果$\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu(x)$是一组解，则$e^{i\lambda(x)}\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu(x)+i\partial_\mu\lambda(x)$也是一组解。

换言之，场$\psi(x)$的相位（它可以看作是电荷空间中的坐标）的局域变化，等效于出现一个附加的电磁场。我们看到，这和爱因斯坦引力理论中的弱等效原理完全类似，在那里，坐标系的变化导致出现附加的引力场。

进一步引伸这一相似性，我们可以提出电荷空间的相对性原理。这一原理是赫尔曼·外尔(Hermann Weyl)在1929年首先提出的，即：场的位形$\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu(x)$和$\psi(x)e^{i\lambda(x)}$，$\mathscr{A}_\mu(x)+i\partial_\mu\lambda(x)$描述同一物理情况。如果要在这一原理基础上建立理论，则以上所述的用协变导数来构造运动方程的方法是唯一可行的方法。

将这一原理推广到更复杂的电荷空间，就产生了杨-米尔斯理论。这样的电荷空间（通常也称为内禀空间）的例子是同位旋空间、强子理论中的么旋空间等等。在所有这些例子中，我们处理的都是在电荷空间中取值的场$\psi(x)$，而电荷空间本身又是某一紧致半单群Ω[$SU(2)$，$SU(3)$等等]的表示空间。场$\psi(x)$的运动方程含有协变导数

$$\nabla_\mu=\partial_\mu-\Gamma(\mathscr{A}_\mu), \tag{1.11}$$

其中，$\Gamma(\mathscr{A}_\mu)$是$\mathscr{A}_\mu$在群Ω的给定表示中的矩阵。例如，如果$\Omega=SU(2)$，而电荷空间对应于二维表示，则前述的生成元T^a由泡利矩阵表示

$$\Gamma(T^a)=\frac{1}{2i}\tau^a, \tag{1.12}$$

其中

$$\tau^1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix};\quad \tau^2=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix};\quad \tau^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

而在此情况下

$$\Gamma(\mathscr{A}_\mu)=\frac{1}{2i}A_\mu^a\tau^a. \tag{1.14}$$

与电动力学中的局域相位变换相类似，作用在场 $\psi(x)$ 上的变换有以下形式：

$$\psi(x)\longrightarrow\psi^\omega(x)=\Gamma[\omega(x)]\psi(x), \tag{1.15}$$

其中，$\omega(x)$ 是 x 的一个函数，它在群 Ω 中取值。将 $\omega(x)$ 看作是群 Ω 的伴随表示中的矩阵是很方便的。如果场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 按以下规则变换

$$\mathscr{A}_\mu(x)\longrightarrow\mathscr{A}_\mu^\omega(x)=\omega(x)\mathscr{A}_\mu(x)\omega^{-1}(x)+\partial_\mu\omega(x)\omega^{-1}(x), \tag{1.16}$$

则（1.11）式对于（1.15）式将是协变的。不难看到，这一变换服从群的法则。变换的集合形成一个群，它可以形式地写为：

$$\tilde{\Omega}=\prod_x\Omega. \tag{1.17}$$

这个群称为规范变换群。

考虑规范变换的无穷小形式常常比较方便，设矩阵 $\omega(x)$ 和单位矩阵相差无穷小

$$\omega(x)=1+\alpha(x)=1+\alpha^a(x)T^a, \tag{1.18}$$

其中 $\alpha(x)$ 属于群 Ω 的李代数。则在这一变换下，$\mathscr{A}_\mu$ 的改变将是

$$\delta\mathscr{A}_\mu=\partial_\mu\alpha-[\mathscr{A}_\mu,\alpha]=\nabla_\mu\alpha, \tag{1.19}$$

或写成分量形式

$$\delta A_\mu^a=\partial_\mu\alpha^a-t^{abc}A_\mu^b\alpha^c. \tag{1.20}$$

ψ 的相应变换有如下形式

$$\delta\psi=\Gamma(\alpha)\psi. \tag{1.21}$$

显然，电动力学的梯度变换群是规范群的特殊情况。

内禀空间的相对性原理指出，场的位形 $\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu(x)$ 和 $\Gamma[\omega(x)]\psi(x)$，$\mathscr{A}_\mu^\omega(x)$ 描述同一物理情况。由于协变导数的存在，使得这一原理能够得到动力学的实现。如果以这一原理作为构造动力学的基础，我们将自然地得到杨-米尔斯理论。

相对性原理意味着，不是一组场，而是整个一类规范等效的场位形对应于真实的物理情况。说得更清楚一些，这一原理意味着，在内禀电荷空间中没有将物质的物理场表示为分量$\psi=(\psi_1,\cdots,\psi_m)$的特殊的固定基底。这样的基底能够在每一时空点局域地引进，然而没有物理的原因将它固定下来。基底的局域变化被解释为规范场的改变，这里的规范场起着和引力场与电磁场相类似的作用。相对性原理使得规范场的动力学描述与对通常更熟悉的场（例如自作用标量场）的描述相比，有显著的差别。为了处理等效的位形类，必须用某种方法将它们参数化，即必须在每一类中选定一个唯一的代表。这一般是通过加上附加条件消去规范自由度来达到的。这种附加条件称为规范条件，或简称为规范。最常用的规范是下列条件：

$$\left.\begin{aligned}&\Phi_L\equiv\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0 &&\text{（洛仑兹规范）;}\\&\Phi_C\equiv\partial_k\mathscr{A}_k=0 &&\text{（库仑规范）;}\\&\Phi_H\equiv\mathscr{A}_0=0 &&\text{（哈密顿规范）;}\\&\Phi_A\equiv\mathscr{A}_3=0 &&\text{（轴规范）。}\end{aligned}\right\}\tag{1.22}$$

对于既包含场$\mathscr{A}_\mu$又包含场ψ的一般系统，ψ也可以进入规范条件。这类条件的例子将在第1.3节中见到。

一般说来，规范条件$\Phi(\mathscr{A},\psi;x)$是$\mathscr{A}_\mu$和ψ的泛函族，对每个x有一个泛函。对于固定的x，$\Phi(\mathscr{A},\psi;x)$是群G的李代数的一个元素，因而独立规范条件的数目等于规范群的维数。在(1.22)式的例子中，所有的条件正好都这样。还有，在这些例子中，规范条件是局域的，即$\Phi(\mathscr{A},\psi;x)$只与$\mathscr{A}_\mu$和ψ在x的邻域中的值有关。

让我们来讨论规范条件所应满足的要求。最重要的要求是方程组

$$\Phi(\mathscr{A}^\omega,\psi^\omega;x)=0\tag{1.23}$$

对固定的$\mathscr{A}_\mu$和ψ有唯一的解$\omega(x)$。这一要求意味着在每一类

等效场的集合中，确实存在唯一的一组场 $\mathscr{A}_\mu, \psi$ 满足条件(1.23)式。这一组场，可看作为这一类的代表，唯一地表征了真实的物理位形。另一个不那么基本但实际上很重要的要求是，(1.23)式必须不太复杂，且能得到一个足够明显形式的解 $\omega(x)$，至少在微扰论范围内应该如此。

方程 (1.23) 是 $\omega(x)$的非线性方程组。对于局域规范条件，它是一个非线性偏微分方程组。例如，对于洛仑兹条件，该方程组有以下形式：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla_\mu L_\mu = \partial_\mu L_\mu - [\mathscr{A}_\mu, L_\mu] = -\partial_\mu \mathscr{A}_\mu\,;\\&L_\mu = \omega^{-1}\partial_\mu \omega\,,\end{aligned}\right\} \tag{1.24}$$

而对于小的 $\mathscr{A}_\mu$ 和 $\alpha(x)$，它可以改写为

$$\Box\alpha - [\mathscr{A}_\mu, \partial_\mu\alpha] + \cdots = -\partial_\mu \mathscr{A}_\mu, \tag{1.25}$$

其中省略号代表 α 的高次项。如果对算符$\Box$补充以合适的边界条件，就可以在微扰论的框架内对 α 求出 (1.25) 式的唯一解。在描述杨-米尔斯场的动力学时会得到这样的边界条件，这将在第三章中讨论。然而，对于大的场 $\mathscr{A}_\mu$，超出了微扰论的范畴，方程 (1.24) 解的唯一性将会丧失。对这种可能性的讨论不属本书的范围。

方程 (1.23) 可解的一个必要条件是相应的雅可比矩阵不退化。规范条件在无穷小规范变换 α 下的变分定义了作用在 α 上的线性算符 M_Φ：

$$\begin{aligned}M_\Phi\alpha = \int\Big\{&\frac{\delta\Phi(\mathbf{A},\psi;x)}{\delta\mathscr{A}_\mu(y)}(\partial_\mu\alpha(y) - [\mathscr{A}_\mu(y),\alpha(y)]\\&+\frac{\delta\Phi(A,\psi;x)}{\delta\psi(y)}\Gamma[\alpha(y)]\psi(y)\Big\}dy,\end{aligned} \tag{1.26}$$

这一算符对 (1.23) 式起雅可比矩阵的作用。算符 M_Φ 不退化：

$$\det M_\Phi \neq 0 \tag{1.27}$$

是方程组 (1.23) 存在唯一解的必要条件。

对于局域规范变换，M_{Φ}是一个微分算符，它是在将方程组(1.23)线性化时得到的。例如，在洛仑兹规范条件的情况下，$M_{\Phi_L}=M_L$具有如下形式

$$M_L\alpha=\Box\alpha-\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,\alpha].$$

只要引入边界条件，这一算符在微扰论范围内就是单值可逆的。前已指出，这些条件将在第三章中讨论。

我们将称(1.27)式为规范条件的相容性条件，以后将经常讨论它。

§1.2 杨-米尔斯场的几何解释

对于上节所述的结构可以有一种精确的几何解释，其中杨-米尔斯场起着引力理论中克利斯托菲符号的作用。和克利斯托菲符号相似，杨-米尔斯场描述了电荷空间中的平行位移，并决定了这一空间的曲率，且场$\psi(x)$类似于张量场。

纤维丛理论提供了描述这一相似性的自然语言.在这理论中，主丛联络的概念对应于杨-米尔斯场。虽然纤维丛理论为经典场论的公理化提供了最合适的语言，但在本书中将不使用它。我们仅仅指出，和杨-米尔斯场等效的“联络”的一般概念，到1950年才在文献中出现，那就是说，与杨振宁、米尔斯的工作实际上是同时进行的。

那么，在什么意义上杨-米尔斯场决定了平行位移？设$\gamma(s)$为时空中由方程

$$x_\mu=x_\mu(s) \tag{2.1}$$

所决定的回路。具有分量为

$$X_\mu=\frac{dx_\mu}{ds} \tag{2.2}$$

的矢量场$\dot\gamma(s)$与曲线$\gamma(s)$在它的每一点上相切。如果在回路的每一点上

$$\nabla_\mu\psi(x)|_{x=x(s)}X_\mu=0, \tag{2.3}$$

即在切向上的协变导数为零，我们就说场 $\psi(x)$ 沿回路 $\gamma(s)$发生了平行位移。

一般说来，沿闭合回路平行位移会改变场 $\psi(x)$。让我们来计算对应于无穷小回路的这一改变。我们将考虑一个具有平行四边形形状的回路，其顶点为

$$(x, x+\Delta_1 x,\ x+\Delta_1 x+\Delta_2 x,\ x+\Delta_2 x).$$

容易验证，如果沿这一回路的协变导数为零，则围绕闭合回路一整圈，$\psi(x)$ 的总变化

$$\Delta_{12}\psi(x)=\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu})\psi(\Delta_1 x_\mu \Delta_2 x_\nu-\Delta_1 x_\nu \Delta_2 x_\mu), \tag{2.4}$$

其中

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}=\partial_\nu \mathscr{A}_\mu-\partial_\mu \mathscr{A}_\nu+[\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]. \tag{2.5}$$

实际上，既然沿边 $(x,\ x+\Delta_1 x)$ 的协变导数等于零，那么，与 x 沿该边移动相对应的 $\psi(x)$ 的改变量

$$\Delta_1\psi(x)=\psi(x+\Delta_1 x)-\psi(x)=\partial_\mu\psi\Delta_1 x_\mu=\Gamma(\mathscr{A}_\mu)\psi(x)\Delta_1 x_\mu. \tag{2.6}$$

对平行四边形剩下的几个边进行类似的计算，并注意到 $\Gamma(\mathscr{A}_\mu)$ 对 $\mathscr{A}_\mu$ 的线性关系以及

$$[\Gamma(\mathscr{A}_u), \Gamma(\mathscr{A}_\nu)]=\Gamma([\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]),$$

我们得到 $\psi(x)$ 总的改变的公式 (2.4) 式。该式表明，可以自然地称 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 为电荷空间的曲率。在规范变换下，$\Delta\psi(x)$ 和 $\psi(x)$ 一样变换。这是因为在构造 $\Delta\psi(x)$ 时我们只用了协变导数。这样，由 (2.4) 式可知，$\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu}(x))$ 按下述规律变换

$$\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu}(x))\longrightarrow\Gamma(\omega(x))\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu}(x))\Gamma(\omega^{-1}(x)), \tag{2.7}$$

因而 $\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 本身在规范变换下按下式变换

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)\longrightarrow\omega(x)\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)\omega^{-1}(x). \tag{2.8}$$

若设 $\psi(x)$ 是相对于规范变换的矢量，则 $\Gamma(\mathscr{F}_{\mu\nu}(x))$ 是一个二阶张量。$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 本身也可以很方便地看成为伴随表示中的一个矢量。

只要利用 $\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 通过 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 表出的（2.5）式，并注意到 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 的变换规律（1.16)式，就可以用直接验算来检验我们对(2.8)式的间接推导。

以上关于杨-米尔斯场的几何解释可以小结如下：它们描述了电荷空间中矢量的平行位移，且张量 $\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 为该空间的曲率。熟悉引力理论的读者肯定已注意到在 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 和克利斯托菲符号之间，在$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 和引力场曲率张量之间有完全的类似性。在结束这一相似性的讨论时，必须指出，张量 $\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 是协变导数的对易子：

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)=[\nabla_\mu,\nabla_\nu], \tag{2.9}$$

而雅可比恒等式

$$[[\nabla_\mu,\nabla_\nu],\nabla_\sigma]+\text{轮换项}=0 \tag{2.10}$$

导致恒等式

$$\nabla_\sigma\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)+\text{轮换项}=0, \tag{2.11}$$

其中

$$\nabla_\sigma\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)=\partial_\sigma\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)-[\mathscr{A}_\sigma(x),\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)].$$

这与引力理论中的毕安琪（Bianchi）恒等式相类似。

在阿贝尔群 $U(1)$ 的情况下，可进行类似的考虑。此时

$$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)=\partial_\nu\mathscr{A}_\mu(x)-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu(x)=i(\partial_\nu A_\mu(x)-\partial_\mu A_\nu(x)), \tag{2.12}$$

它显然和电磁场强度张量一致。由福克（Fock）和赫尔曼·外尔首先提出的将 $\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$ 解释为电荷空间的曲率的方法，是将电磁场几何化的最自然的方法。将这种场和时空本身的几何性质关联起来的大量尝试从未得到成功。

在结束这一节的时候，我们讲几句关于杨-米尔斯场经典动力学的问题。我们的任务是构造一个规范不变拉格朗日函数，它在阿贝尔群 $U(1)$ 的情况下和电磁场的拉格朗日函数

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4e^2}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\mathscr{L}_M(\psi,\nabla_\mu\psi) \tag{2.13}$$

相符，式中的$\mathscr{L}_M$描述场$\mathscr{A}_\mu(x)$和$\psi(x)$的规范不变的相互作用，它是由场ψ的自由拉格朗日函数通过用协变导数代替通常的导数而推导出来的；e起电荷的作用．这一公式很容易改写成为熟悉的形式，只要改变一下场的归一化：

$$\mathscr{A}_\mu(x)\longrightarrow e\mathscr{A}_\mu(x). \tag{2.14}$$

在此情况下，第一项中的因子e^{-2}消失，而代之以在协变导数的表达式中出现因子e：

$$\nabla_\mu\longrightarrow\partial_\mu-e\mathscr{A}_\mu.$$

以下我们将使用场$\mathscr{A}_\mu(x)$的这两种归一化方法，而不特别加以说明。

(2.13)式对于单纯非阿贝尔规范群的自然的（而且是唯一可能的）推广为下述表达式：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8g^2}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\mathscr{L}_M(\psi,\nabla_\mu\psi). \tag{2.15}$$

第一项也可改写为

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4g^2}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}, \tag{2.16}$$

其中$F^a_{\mu\nu}(x)$是矩阵$\mathscr{F}_{\mu\nu}(x)$相对于基底T^a的分量。显然，这一拉格朗日函数对(1.15)、(1.16)式是不变的。

在一般的半单群的情况下，拉格朗日函数包含r个任意常数g_i，$i=1,2,\cdots,r$，其中r是不变单纯因子的数目．这样，和(2.16)式类似的公式有以下形式

$$\mathscr{L}=\sum_i-\frac{1}{4g_i^2}F^{a_i}_{\mu\nu}F^{a_i}_{\mu\nu}, \tag{2.17}$$

其中，i是单纯因子的指标。

和电动力学不一样，真空中（即不存在场ψ时）杨-米尔斯场的拉格朗日(2.16)式除了场的二次项外，还包含更高次的项。这意味着杨-米尔斯场有不平凡的自作用。换句话说，杨-米尔斯场的量子本身带有电荷，传递它们之间的相互作用．杨-米尔斯场

动力学的主要特点与这一自作用有关，因此，在处理普遍问题时，一般将局限于真空中的杨-米尔斯场模型。

从真空中的杨-米尔斯场的拉格朗日函数（2.16）式得到的运动方程有以下形式：

$$\nabla_\mu \mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{F}_{\mu\nu} - [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{F}_{\mu\nu}] = 0; \tag{2.18}$$

或用 $\mathscr{A}_\mu$ 写出

$$\Box \mathscr{A}_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \mathscr{A}_\mu + [\mathscr{A}_\mu, (\partial_\nu \mathscr{A}_\mu - \partial_\mu \mathscr{A}_\nu + [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu])] - \partial_\mu [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu] = 0, \tag{2.19}$$

它是一个二阶方程组。这些方程在下述意义下是规范不变的：如果 $\mathscr{A}_\mu$ 是（2.19）式的一个解，则对于任意的 $\omega(x)$，$\mathscr{A}_\mu^\omega$ 也是一组解。这意味着，利用初始条件［在固定时刻 t 的 $\mathscr{A}_\mu(x, t)$，$\partial_0 \mathscr{A}_\mu(x,t)$］定解的标准方法对（2.19）式不适用。加上规范条件以后，这一障碍消除了。然而，这样一来，初始条件不再是任意的，而要被规范条件所限制。

杨-米尔斯场与物质场相互作用的模型将在下节中讨论。

§1.3　有规范场的动力学模型

描述杨-米尔斯场和旋量场相互作用的拉格朗日是最简单的。设旋量场多重态 $\psi_k(x)$ 实现了一个单纯紧緻规范群 Ω 的表示 $\Gamma(\omega)$，则拉格朗日函数有如下形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + i\bar{\psi}(x)\gamma_\mu \nabla_\mu \psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \tag{3.1}$$

式中，$\mathscr{L}_{YM}$ 是现已熟悉的真空中杨-米尔斯场的拉格朗日函数

$$\mathscr{L}_{YM} = \frac{1}{8g^2} \mathrm{tr} \mathscr{F}_{\mu\nu} \mathscr{F}_{\mu\nu}. \tag{3.2}$$

在两个旋量场的标积中，要对内部自由度的指标求和。例如，质量项可写为

$$m\bar{\psi}(x)\psi(x) = m\bar{\psi}_k(x)\psi_k(x). \tag{3.3}$$

还有，

$$(\nabla_\mu \psi(x))_k = \partial_\mu \psi_k(x) - (\Gamma(\mathscr{A}_\mu(x)))_{kl} \psi_l(x), \tag{3.4}$$

其中 $(\Gamma(\mathscr{A}_\mu))_{kl}=A_\mu^a(\Gamma(T^a))_{kl}$，而矩阵 $(\Gamma(T^a))_{kl}$ [以下将简称为 Γ_{kl}^a] 是生成元 T^a 在由场 $\psi(x)$ 所实现的表示中的矩阵．这样，

$$\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\nabla_\mu\psi(x)=\bar{\psi}_k(x)\gamma_\mu(\partial_\mu\psi_k(x)-A_\mu^a(x)\Gamma_{kl}^a\psi_l(x)). \quad (3.5)$$

例如，设规范群为 $SU(2)$，而场 $\psi(x)$ 实现了这个群的基础表示，则

$$(\Gamma(\mathscr{A}_\mu))_{kl}=-\frac{i}{2}A_\mu^a(\tau^a)_{kl}, \quad (3.6)$$

其中，τ^a 为泡利矩阵．完全的拉格朗日函数有以下形式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4g^2}(\partial_\nu A_\mu^a-\partial_\mu A_\nu^a+\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c)^2\\&+i\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu\psi+\frac{i}{2}A_\mu^a\tau^a\psi\right)-m\bar{\psi}\psi. \end{aligned}\quad (3.7)$$

在规范群是 $SU(3)$ 群且旋量 $\psi(x)$ 实现它的基础（旋量）表示的情况下，与此相似的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&-\frac{1}{4g^2}(\partial_\nu A_\mu^a-\partial_\mu A_\nu^a+f^{abc}A_\mu^bA_\nu^c)^2\\&+i\bar{\psi}\gamma_\mu\left(\partial_\mu\psi+\frac{i}{2}A_\mu^a\lambda^a\psi\right)-m\bar{\psi}\psi, \end{aligned}\quad (3.8)$$

其中 f^{abc} 是群 $SU(3)$ 的结构常数，而矩阵 λ^a 是熟知的盖尔曼 (Gell-Mann) 矩阵：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix};\\&\lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix};\quad \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix};\\&\lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix};\quad \lambda_8=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}.\end{aligned}\right\}\quad (3.9)$$

场的重新归一化

$$A_\mu^a(x) \longrightarrow gA_\mu^a(x) \tag{3.10}$$

将（3.7）和（3.8）式改变为更加熟悉的形式，在这种形式下，g 仅仅包含在相互作用项中。

后一拉格朗日函数应用在强相互作用理论中。在此情况下，旋量 ψ 被认为是夸克场，杨-米尔斯场称为"胶子"，而内禀空间称为色空间。

在以上所考虑的规范群为单纯群的例子中，所有相互作用只由一个单一耦合常数表征。相互作用的这种普适性是杨-米尔斯理论的一个特点。

下一个有用的例子是杨-米尔斯场和标量场的相互作用。设标量场的多重态 $\varphi_k(x)$ 实现了单纯紧致群 Ω 的一个实表示 $\Gamma(\omega)$，则规范不变的拉格朗日函数为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2}\nabla_\mu\varphi\nabla_\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi\varphi - V(\varphi), \tag{3.11}$$

其中协变导数 $\nabla_\mu\varphi$ 和前面一样构造

$$\nabla_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - \Gamma(\mathscr{A}_\mu)\varphi, \tag{3.12}$$

$\varphi\varphi$ 和前面一样是电荷空间的标积，而 $V(\varphi)$ 是场 φ 对于群 Ω 不变的一个三次或四次型。

在 $\Omega = SU(2)$，而场 φ 实现伴随表示 $\varphi = \varphi^a$，$a = 1,2,3$ 的情况下，相应的公式为

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2}(\partial_\mu\varphi^a - g\varepsilon^{abc}A_\mu^b\varphi^c)^2 - \frac{m^2}{2}\varphi^a\varphi^a - \lambda^2(\varphi^a\varphi^a)^2, \tag{3.13}$$

其中参量 m 起质量的作用而参量 λ^2 起标量场接触相互作用耦合常数的作用。从物理应用的观点看来，(3.13) 式本身显然没有多大意义。然而，只要稍加修改就产生了极大的意义，能在杨-米尔斯理论的框架内描述有质量的矢量场。为矢量场产生质量的这一机制称为希格斯效应。我们现在来讨论这一效应。

我们继续以规范群 $SU(2)$ 作为例子来进行讨论。首先考虑标量场属于伴随表示的情况。我们将采用下述拉格朗日函数：

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{YM} + \frac{1}{2}(\nabla_\mu \varphi^a)^2 - \lambda^2(\varphi^a\varphi^a - \mu^2)^2. \qquad (3.14)$$

(3.14) 式与 (3.13) 式的差别在于常数项 $-\lambda^2\mu^4$ 以及 φ 平方项的符号。初看起来，(3.14) 式描述带有虚质量的粒子，因而没有物理意义。然而这一结论作得太匆忙了。φ 平方项只在 $\varphi=0$ 是稳定平衡点，因而是势能极小值时，才起质量项的作用。在我们所讨论的情况下，势能是

$$U(A_\mu,\varphi) = \int\left[\frac{1}{4g^2}F^a_{ik}F^a_{ik} + \frac{1}{2}\nabla_i\varphi^a\nabla_i\varphi^a + \lambda^2(\varphi^a\varphi^a - \mu^2)^2\right]d^3x,$$

$$i,k = 1,2,3. \qquad (3.15)$$

位形 $\varphi^a=0$，$A^a_\mu=0$ 是一个鞍点，对应的平衡是不稳定的。然而，也存在稳定平衡点，它们对应于等于零的 A^a_μ 和有固定长度 $\varphi^2=\mu^2$ 的常数 φ。这样的 $\mathscr{A}_\mu$、φ 使得组成势能的三个正项都变为零（需要指出，除了这样的位形本身以外，它们的规范变换显然产生出也是极小值的位形。然而，由于相对性原理，这些位形不给出新的物理信息，我们将不考虑它们）。

除了这些具有平移不变性的极小值之外，势能还有另外的例如对应于特霍夫特和波利亚柯夫磁单极的极小值。然而，这些位形的能量值要高些，因为它们只是局部极小。

为了决定真空的质量，需要将势能在真极小值周围展成泰勒级数。在我们所讨论的情况下，平衡点是简并的，极小值的位形形成一个二维球 S^2，它上面的点对应于常矢量 $\vec{\varphi}$ 的方向。我们将用 $\vec{n}$ 表示这一方向，并将对应的 φ 写上指标 n，因而 $\vec{\varphi}_n=\mu\vec{n}$。如果我们将位形空间约化，只考虑在大 $|x|$ 时渐近地和某一个 $\vec{\varphi}_n$ 相合的场 $\vec{\varphi}$，则这一简并消失。自然，这样一个选择破坏了常参量 $SU(2)$ 变换下的不变性（同位旋不变性）。可以证明，这一条

件并不与动力学相矛盾，而且和 $\vec{\varphi}_n$ 的不同选择对应的理论在物理上等效。熟悉固体物理的读者自然会看到这和铁磁理论有相似性，在那里，要表达理论本身，就必须对自发磁化的方向作一个选择。

为确定起见，我们选择矢量 $\vec{n}$ 沿第三轴：$\vec{n}=(0,0,1)$。相应的矢量 $\vec{\varphi}_n$ 是 $(0,0,\mu)$。

转换到无穷远渐近地趋于零的 $\vec{\varphi}(x)$，

$$\vec{\varphi}(x)\longrightarrow\vec{\varphi}_n+\vec{\varphi}(x) \tag{3.16}$$

使得同位旋对称性明显地被破坏，而拉格朗日函数成为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2}(\nabla_\mu\varphi^a)^2+\frac{m_1^2}{2}[(A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2]\\&+m_1(A_\mu^1\partial_\mu\varphi^2-A_\mu^2\partial_\mu\varphi^1)+gm_1[\varphi^3[(A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2]\\&-A_\mu^3[\varphi^1A_\mu^1+\varphi^2A_\mu^2]]-\frac{m_2^2}{2}(\varphi^3)^2-\frac{m_2^2g}{2m_1}\varphi^3(\varphi^a)^2\\&-\frac{m_2^2g^2}{8m_1^2}(\varphi^a\varphi^a)^2,\end{aligned}$$

$$m_1=\mu g,\qquad m_2=2\sqrt{2}\lambda\mu. \tag{3.17}$$

虽然我们明显地破坏了同位旋不变性，拉格朗日函数和边界条件在无穷远趋于 1 的函数 $\omega(x)$ 的局域规范变换下是不变的。我们来给出在新变量下规范变换的显式。局限于无穷小变换：

$$\delta\varphi^a(x)=-g\varepsilon^{abc}\varphi^b(x)\alpha^c(x)-m_1\varepsilon^{a3c}\alpha^c(x). \tag{3.18}$$

为了分析由(3.17)式产生的质量谱，我们必须在场 $\mathscr{A}_\mu(x)$、$\varphi(x)$ 的规范等效类中选择代表，也就是说必须固定规范。选择下述规范条件是方便的：

$$\varphi^1(x)=0;\ \ \varphi^2(x)=0;\ \ \partial_\mu A_\mu^3(x)=0. \tag{3.19}$$

可以验证，对于足够小的 $\varphi^3(x)$，相容性条件是满足的。实际上

$$\delta(\partial_\mu A_\mu^3)=\Box\alpha^3-g\varepsilon^{abc}\partial_\mu(A_\mu^b\alpha^c), \tag{3.20}$$

而 $\delta\varphi^{1,2}$ 由（3.18）式决定．其结果，与我们的规范相应的算符 M 有以下形式〔注〕

$$M=\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \alpha^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & g\varphi^3+m_1 & -g\varphi^2\\ -g\varphi^3-m_1 & 0 & g\varphi^1\\ \partial_\mu A_\mu^2+A_\mu^2\partial_\mu & -A_\mu^1\partial_\mu-\partial_\mu A_\mu^1 & \square\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \alpha^3\end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

在 φ 小时，算符 M 的行列式是

$$\det M=m_1^2\det\square+O(\varphi). \quad (3.22)$$

因为第一项不是零，在微扰论范围内 $\det M\neq0$，满足相容性条件．

现在我们写出决定质量谱的平方项

$$\mathscr{L}_0=-\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu^a-\partial_\mu A_\nu^a)^2+\frac{m_1^2}{2}[(A_\mu^1)^2+(A_\mu^2)^2]$$
$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi^3\partial_\mu\varphi^3-\frac{m_2^2}{2}(\varphi^3)^2. \quad (3.23)$$

可以看出，我们的理论在经典近似下描述两个有质量矢量场、一个无质量矢量场以及一个有质量的标量粒子．因而，确实是有两个矢量场获得了质量，然而，有两个标量场的量子消失了．

不难建立使所有三个矢量场都得到非零质量的 $SU(2)$ 规范不变模型．为此，需要考查在二维（旋量）表示中的复标量场多重态

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\qquad \varphi^+=(\varphi_1^*,\varphi_2^*). \quad (3.24)$$

规范不变的拉格朗日函数是

$$\mathscr{L}=\mathscr{L}_{YM}+(\nabla_\mu\varphi)^+\nabla_\mu\varphi-\lambda^2(\varphi^+\varphi-\mu^2)^2, \quad (3.25)$$

式中

$$\nabla_\mu\varphi=\partial_\mu\varphi+\frac{i}{2}g\tau^aA_\mu^a\varphi, \quad (3.26)$$

场 φ 的规范变换由下式给出

$$\delta\varphi(x)=\frac{1}{2i}g\tau^a\alpha^a(x)\varphi(x). \quad (3.27)$$

〔注〕(3.21)式右边矩阵右上角的三个元素和原书相比均差符号．

——译者

和前述情况一样，稳定的极值点对应于满足

$$\varphi^{+}\varphi=\mu^{2} \tag{3.28}$$

的常数φ。我们看到，在此情况下，稳定极值点的集合形成一个三维球S^3。为消除简并，我们选择

$$\varphi(x)=\begin{pmatrix}0\\ \mu\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

作为极小值。可以验证，条件

$$\varphi_{1}(x)=0,\ \ \mathrm{Im}\varphi_{2}(x)=0 \tag{3.30}$$

是一个容许的规范。在此规范下，只留下了一个标量场$\mathrm{Re}\varphi_2(x)=(1/\sqrt{2})\sigma(x)$。过渡到在无穷远渐近地趋于零的场

$$\sigma(x)\longrightarrow\sqrt{2}\,\mu+\sigma(x), \tag{3.31}$$

我们得到拉格朗日函数

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}F^{a}_{\mu\nu}F^{a}_{\mu\nu}+\frac{m_1^2}{2}A^{a}_{\mu}A^{a}_{\mu}+\frac{1}{2}\,\partial_{\mu}\sigma\partial_{\mu}\sigma-\frac{1}{2}m_2^2\sigma^2$$

$$+\frac{m_1 g}{2}\,\sigma A^{a}_{\mu}A^{a}_{\mu}+\frac{g^2}{8}\sigma^2A^{a}_{\mu}A^{a}_{\mu}-\frac{gm_2^2}{4m_1}\sigma^3-\frac{g^2m_2^2}{32m_1^2}\sigma^4,$$

$$m_1=\frac{\mu g}{\sqrt{2}},\qquad m_2=2\lambda\mu, \tag{3.32}$$

它描述三个有质量矢量场和一个有质量标量场的相互作用。

以上所述的机制将进一步被用来建立弱作用和电磁作用统一的规范不变模型。我们结束了对经典杨-米尔斯场的讨论，下面来讨论它的量子化。

第二章　用路径积分表示的量子理论

场论的量子化有几种途径．最通常的做法是利用算符方法实现量子化，其中的算符满足与经典场位形相应的正则对易关系．然而，还有另一种途径，其中的量子动力学是由对所有的场位形作和来描述，这称为路径积分．费曼(Feynman)首先按这一方法为量子电动力学建立了一个自洽的、明显相对论不变的微扰论．对于规范场的量子化，这一方案被证明是最方便的，因为它以最简单的方式考虑了相对性原理：积分不是对所有的场位形进行，而是只对规范等效的类进行．

本章我们将讨论路径积分的普遍方案．下章将讨论这一方案对规范场的应用．

§2.1　对相空间的路径积分

我们将从阐明路径积分方法的主要原理开始，作为例子，把它应用于非相对论量子力学．首先讨论具有一个自由度的系统．

设 p 和 q 为一个粒子的正则动量和坐标（$-\infty<p<\infty$，$-\infty<q<\infty$）．在量子化的算符方法中，与 p，q 对应的有算符 P，Q．对于它们，最常采用的有两种表象——坐标表象和动量表象．在坐标表象中的算符及其本征函数是

$$\left.\begin{aligned}
&Q = x; && P = \frac{1}{i}\frac{d}{dx};\\
&|q\rangle = \delta(x-q); && |p\rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2} e^{ipx};\\
&Q|q\rangle = q|q\rangle; && P|p\rangle = p|p\rangle.
\end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

从坐标表象到动量表象以及反过来的变换函数由下式给出

$$\langle p|q\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-ipq}, \quad \langle q|p\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{ipq}. \qquad (1.2)$$

系统的动力学借助于哈密顿函数 $h(p, q)$ 描述．在量子动力学中，这一函数与哈密顿算符

$$H=h(P,Q) \qquad (1.3)$$

相对应，其中，对于不可对易的算符宗量 P 和 Q 要假设一定的排列方式．这里不讨论有关排列顺序的普遍问题，但在引进路径积分概念以后还将回到这一问题．我们所用的形式的论证不依赖于排列方式的具体选择．为确定起见，将假定所有的 P 算符都放在所有的 Q 算符的左边．

显然，利用这一假定，哈密顿算符 H 在态 $\langle p|$ 和 $|q\rangle$ 之间的矩阵元可以用经典哈密顿函数表示

$$\langle p|H|q\rangle=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-ipq}h(p,q). \qquad (1.4)$$

我们的目的是计算演化算符

$$U(t'',t')=\exp\{-iH(t''-t')\}. \qquad (1.5)$$

我们将计算它的矩阵元

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle=\langle q''|\exp\{-iH(t''-t')\}|q'\rangle$$
$$=\langle q'',t''|q',t'\rangle, \qquad (1.6)$$

它可称为算符 U 在坐标表象中的核．

对于小的 $t''-t'$，考虑到前面的公式，不难算出（1.6）式．实际上，在此情况下

$$\exp\{-iH(t''-t')\}\cong 1-iH(t''-t'), \qquad (1.7)$$

而矩阵元

$$\langle p|U(t'',t')|q\rangle\cong\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}e^{-ipq}(1-ih(p,q)(t''-t'))$$

$$\cong\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{1/2}\exp\{-ipq-ih(p,q)(t''-t')\}. \qquad (1.8)$$

算符 $U(t'',t')$ 在坐标表象中的核借助变换函数可容易地算出

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle=\int\langle q''|p\rangle\langle p|U(t'',t')|q'\rangle dp$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\exp\{ip(q''-q')-ih(p,q')(t''-t')\}dp. \quad (1.9)$$

对于有限的时间间隔 $t''-t'$，这一公式显然是不对的. 在此情况下，可以这样进行，将间隔 $t''-t'$ 分为 N 步，让

$$\Delta t=\frac{t''-t'}{N} \quad (1.10)$$

足够小，使得前述关于算符 $\exp\{-iH\Delta t\}$ 的公式可以应用. 算符 $U(t'',t')$ 用 $\exp\{-iH\Delta t\}$ 表示，即

$$U(t'',t')=(\exp\{-iH\Delta t\})^N. \quad (1.11)$$

将右边的所有因子用它们的核表示，并对所有的中间态积分，得到

$$\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle\cong\int\exp\Big\{i\,[p_N(q_N-q_{N-1})+\cdots+p_1(q_1-q_0)]-i[h(p_N,q_{N-1})+\cdots+h(p_1,q_0)]\Delta t\Big\}\times\frac{dp_N}{2\pi}\,\frac{dp_{N-1}dq_{N-1}}{2\pi}\cdots\frac{dp_1dq_1}{2\pi}, \quad (1.12)$$

这里 $q_N=q''$，$q_0=q'$.

现在我们过渡到 $N\to\infty$，$\Delta t\to 0$ 的极限，积分变量的数目也趋于无穷. 可以认为，在极限情况下，是对于区间 $t'<t<t''$ 中所有 t 的函数 $p(t)$，$q(t)$ 之值积分，其中函数 $q(t)$ 受条件

$$q(t')=q';\ q(t'')=q'' \quad (1.13)$$

的限制. 在此极限下，指数函数的宗量变为积分

$$A_{t'}^{t''}=\int_{t'}^{t''}(p(t)\dot{q}(t)-h[p(t),q(t)])dt, \quad (1.14)$$

那就是说，变成了在间隔 (t',t'') 中的经典作用量。这样，我们得到了主要的结果：演化算符的矩阵元，可由费曼泛函 $\exp\{iA_{t'}^{t''}\}$ 对相空间中在 $t=t'$ 和 t'' 时有定值 q' 和 q'' 的所有轨道 $p(t),q(t)$ 积分得到。积分测度可形式地写为

$$\frac{dp''}{2\pi}\prod_t\frac{dp(t)dq(t)}{2\pi},\tag{1.15}$$

那就是说，它表示为对所有 t 值的刘维(Liouville)测度的乘积。这样，我们就仅仅只用经典的作用量和测度构造出了量子力学的表达式。如果对算符因子采用另一种排列方式，最终也会得到同样的结果

$$\begin{aligned}\langle q'',t''|q',t'\rangle&=\langle q''|U(t'',t')|q'\rangle\\&=\int\exp\left\{i\int_{t'}^{t''}(p\dot{q}-h(p,\ q)dt\right\}\prod_t\frac{dpdq}{2\pi}.\end{aligned}\tag{1.16}$$

初看起来，我们似乎是成功地完全用正则不变的经典对象建立起了量子力学，实际上并非如此。因为，经典力学的整个正则变换群不能转移到量子力学中。这个佯谬的解决是基于下述事实：实际上，在没有进行极限过渡的情况下，对于内部项的路径积分我们并没有给出定义。为了赋予路径积分以真实的意义，必须定义计算它的具体方法，而这实际上与选定排列方式等效。在场论中，由微扰论给出了一个计算方法（在目前是唯一的一个）。在这种情况下，路径积分的精确定义将会给出。目前，我们将把路径积分作为有限维的积分来对待。我们希望下面给出的路径积分的形式处理，将会帮助读者建立起对这一对象的直观而清晰的概念。

费曼自已用了一个略有不同的路径积分，那就是对坐标空间中轨道的积分。如果哈密顿量对动量是二次的：

$$h=\frac{p^2}{2m}+v(q),\tag{1.17}$$

就可以得到费曼的公式.

实际上，在此情况下，对变量 p 的积分可以明显地算出来，在积分

$$\int \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(p\dot{q}-\frac{p^2}{2m}-v(q)\right)dt\right\}\prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \tag{1.18}$$

中进行移动

$$p(t)\to p(t)+m\dot{q}, \tag{1.19}$$

对 p 和 q 的积分就变成可分离的，于是得到

$$\langle q'',t''|q',t'\rangle = \frac{1}{N}\int \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(\frac{\dot{q}^2}{2m}-v(q)\right)dt\right\}\prod_t dq, \tag{1.20}$$

其中

$$N^{-1}=\int \exp\left\{-i\int_{t'}^{t''}\frac{p^2}{2m}dt\right\}\prod_t \frac{dp}{2\pi}. \tag{1.21}$$

归一化因子 N 显然不依赖于 q' 和 q''，而只是时间 $t''-t'$ 的函数. 通常这一因子包含在测度的定义中. 从以上给出的推导可以清楚地看出，路径积分的第二种形式不那么普遍. 它只对于那些对动量是二次的哈密顿量才正确. 然而，对于从物理观点看来有兴趣的大多数问题而言，哈密顿量具有这一性质. 因此，对这类问题，两种形式等效.

对于多自由度体系的情况，可以类似地处理. 在这种情况下，采用矢量符号

$$\left.\begin{aligned} &p=(p_1,\cdots,p_n);\quad q=(q^1,\cdots,q^n);\\ &p\dot{q}=\sum_i p_i\dot{q}^i;\quad \frac{dpdq}{2\pi}=\prod_i\frac{dp_i dq^i}{2\pi}, \end{aligned}\right\} \tag{1.22}$$

就可以沿用公式 (1.16), (1.20).

从哈密顿动力学观点看来，量子场论是一个具有无穷多自由度的体系. 例如，在由拉格朗日函数

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - \frac{m^2}{2}\varphi^2 - V(\varphi) \tag{1.23}$$

描述的中性标量场情况下，相空间的点是一对函数 $\varphi(\vec{x})$，$\pi(\vec{x})$，它们形成正则变量的一个无穷集合。宗量 $\vec{x}$ 起着这些变量的标号的作用。泊松括号是

$$\begin{aligned}&\{\varphi(\vec{x}),\varphi(\vec{y})\} = 0, \quad \{\pi(\vec{x}),\pi(\vec{y})\} = 0;\\&\{\varphi(\vec{x}),\pi(\vec{y})\} = \delta^3(\vec{x}-\vec{y}).\end{aligned} \tag{1.24}$$

$\varphi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 量子化以后所对应的算符 $\boldsymbol{\varphi}(x)$ 和 $\boldsymbol{\pi}(\vec{x})$有许多表象。有一种表象(坐标表象)是 $\boldsymbol{\varphi}(\vec{x})$对角的；态矢量是 $\varphi(\vec{x})$ 的泛函$\Phi(\varphi(\vec{x}))$，而

$$\left.\begin{aligned}&\boldsymbol{\varphi}(\vec{x})\Phi(\varphi) = \varphi(\vec{x})\Phi(\varphi);\\&\boldsymbol{\pi}(\vec{x})\Phi(\varphi) = \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(\vec{x})}\Phi(\varphi).\end{aligned}\right\} \tag{1.25}$$

更常用的是后面将会谈到的福克空间中的表象。

哈密顿量是

$$H(\pi,\vec{\varphi}) = \int\Big[\frac{\pi^2(\vec{x})}{2} + \frac{1}{2}\partial_k\varphi(\vec{x})\partial_k\varphi(\vec{x}) + \frac{m^2}{2}\varphi^2(\vec{x}) + V(\varphi)\Big]d^3\vec{x}. \tag{1.26}$$

容易验证，哈密顿运动方程

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\varphi(\vec{x}) = \frac{\delta H}{\delta\pi(\vec{x})} = \pi(\vec{x});\\&\frac{d}{dt}\pi(\vec{x}) = -\frac{\delta H}{\delta\varphi(\vec{x})} = \Delta\varphi - V'(\varphi) - m^2\varphi\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

确实与通常标量场的方程

$$\Box\varphi + m^2\varphi = -V'(\varphi) \tag{1.28}$$

一致。

前面得到的用路径积分表述演化算符的公式也能直接应用到这一情况。在坐标表象中我们有

$$\langle\varphi''(\vec{x}),t''|\varphi'(\vec{x}),t'\rangle=\langle\varphi''(\vec{x})|\exp\{-iH(t''-t')\}|\varphi'(\vec{x})\rangle$$

$$=\int\exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left[\pi(\vec{x},t)\partial_t\varphi(\vec{x},t)-\frac{\pi^2(\vec{x},t)}{2}-\frac{1}{2}\left(\partial_k\varphi(\vec{x},t)\right)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{m^2\varphi^2(\vec{x},t)}{2}-V(\varphi(\vec{x},t))\right]d^3\vec{x}dt\right\}\prod_{\vec{x},t}\frac{d\pi(\vec{x},t)d\varphi(\vec{x},t)}{2\pi}$$

$$=\frac{1}{N}\int\exp\left\{i\int\mathscr{L}(\varphi)d^4x\right\}\prod_x d\varphi(x),$$

$$t'<x_0<t'';\quad \varphi(\vec{x},t'')=\varphi''(\vec{x});\quad \varphi(\vec{x},t')=\varphi'(\vec{x}). \tag{1.29}$$

在第二式中，用了相对论的符号 $x=(\vec{x},t)$。在这一公式中唯一不是洛仑兹不变的东西是对 $t'\leqslant x_0\leqslant t''$ 的积分区间。我们最终将对无穷时间间隔的演化算符感兴趣，因为这一算符是构造按下式定义的散射矩阵时所需要的：

$$S=\lim_{\substack{t''\to\infty\\t'\to-\infty}}e^{iH_0t''}e^{-iH(t''-t')}e^{-iH_0t'}, \tag{1.30}$$

其中 H_0 是自由运动的能量算符，它由 H 中略去相互作用项 $V(\varphi)$ 而得到。

以上所用的表象对于计算这一极限不方便，因为在这一表象中算符 $\exp\{-iH_0t\}$ 的表达式很繁。一个更方便的表象是所谓的全纯表象，在这种表象中，产生的算符是对角的。下一节就来讨论这一表象。

§2.2 全纯表象中的路径积分

我们再一次从一维情况开始。作为例子，考虑哈密顿量为

$$h(p,q)=\frac{p^2}{2}+\frac{\omega^2q^2}{2} \tag{2.1}$$

的谐振子．引进复坐标

$$a^* = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q - ip); \qquad a = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(\omega q + ip), \tag{2.2}$$

用这种坐标表示时，哈密顿量具有形式 $h = \omega a^* a$。

在量子力学中，和这种坐标对应的算符相互共轭，并遵从对易规则

$$[a, a^*] = 1. \tag{2.3}$$

这一对易规则有一个表象是在解析函数$f(a^*)$ 所形成的空间中的表象．这一空间带有标积

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i}. \tag{2.4}$$

算符 a^* 和 a 的作用方式如下：

$$a^* f(a^*) = a^* f(a^*); \qquad a f(a^*) = \frac{d}{da^*} f(a^*). \tag{2.5}$$

在这里，我们用了关系式

$$\frac{da^* da}{2\pi i} = \frac{dpdq}{2\pi}. \tag{2.6}$$

以上引进的标积是正定的．确实，一个任意的解析函数是单

$$\psi_n(a^*) = \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \tag{2.7}$$

项式的线性组合，简单的计算证明，这些单项式是正交归一的：

$$\begin{aligned}\langle \psi_n | \psi_m \rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \int a^n (a^*)^m e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n!m!}} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \rho^{n+m} e^{i\theta(n-m)} e^{-\rho^2} \\ &= \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 1, & n = m, \end{cases}\end{aligned} \tag{2.8}$$

由此得到标积的正定性．

也可以清楚看到，算符 a^* 和 a 是相互共轭的。实际上，考虑到

$$a^* e^{-a^* a} = -\frac{d}{da} e^{-a^* a}, \quad \frac{d}{da} f(a^*) = 0, \tag{2.9}$$

进行分部积分得到

$$\begin{aligned}(f_1, a^* f_2) &= \int (f_1(a^*))^* a^* f_2(a^*)\, e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i} \\ &= \int \left[\frac{d}{da} \Big((f_1(a^*))^* f_2(a^*) \Big) \right] e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i} \\ &= \int \left(\frac{d}{da^*} f_1(a^*) \right)^* f_2(a^*) e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i} \\ &= (a f_1, f_2).\end{aligned} \tag{2.10}$$

在这一表象中描述任意算符有两种方式。第一，一个任意算符**A**可表示为带有核 $A(a^*,a)$ 的积分算符：

$$(\mathbf{A} f)(a^*) = \int A(a^*,a)\, f(a^*)\, e^{-a^* a} \frac{da^* da}{2\pi i}. \tag{2.11}$$

核 $A(a^*,a)$ 由算符**A**在基底 ψ_n 中的矩阵元表示如下：如果

$$A_{nm} = \langle \psi_n | \mathbf{A} | \psi_m \rangle, \tag{2.12}$$

则

$$A(a^*,a) = \sum_{n,m} A_{nm} \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \frac{a^m}{\sqrt{m!}}. \tag{2.13}$$

这一公式定义了 $A(a^*,a)$ 作为两个复变量 a^* 和 a 的解析函数，这两个复变量不一定相互共轭。

核的卷积对应于算符 $\mathbf{A}_1$ 和 $\mathbf{A}_2$ 的乘积：

$$(A_1 A_2)(a^*,a) = \int A_1(a^*,a) A_2(a^*,a) e^{-a^* a} \times \frac{da^* da}{2\pi i}. \tag{2.14}$$

算符的第二种表达方式是将一个算符定义为算符a^*和a的正规乘积的多项式。所有的a^*都在所有的a的左边的乘积称为正规乘积。让我们来考查由正规乘积之和表示的算符

$$\mathbf{A}=\sum_{n,m}K_{nm}(a^*)^n a^m \tag{2.15}$$

的核。这个算符可以和一个函数

$$K(a^*,a)=\sum_{n,m}K_{nm}(a^*)^n a^m \tag{2.16}$$

相联系；我们称这一函数为算符A的正规符号。算符A的核和$K(a^*,a)$由下式相联系

$$A(a^*,a)=e^{a^*a}K(a^*,a). \tag{2.17}$$

为了验证这一等式，令算符A为单项式

$$\mathbf{A}=(a^*)^k a^l, \tag{2.18}$$

因而

$$K(a^*,a)=(a^*)^k a^l, \tag{2.19}$$

而

$$\begin{aligned}A_{nm}&=\langle\psi_n|\mathbf{A}|\psi_m\rangle\\&=\frac{1}{\sqrt{n!m!}}\int\left(\left(\frac{d}{da^*}\right)^k(a^*)^n\right)^*\left(\left(\frac{d}{da^*}\right)^l(a^*)^m\right)e^{-a^*a}\frac{da^*da}{2\pi i}\\&=\sqrt{n(n-1)\cdots(n-k+1)}\sqrt{m(m-1)\cdots(m-l+1)}\\&\quad\times\theta(n\geqslant k)\theta(m\geqslant l)\delta_{n-k,m-l},\end{aligned} \tag{2.20}$$

其中

$$\theta(n\geqslant k)=\begin{cases}0\text{，如果 } n<k,\\1\text{，如果 } n\geqslant k.\end{cases}$$

现在利用（2.13）式来构造$A(a^*,a)$，有

$$\begin{aligned}A(a^*,a)&=\sum_{n,m}A_{nm}\frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}}\frac{a^m}{\sqrt{m!}}\\&=(a^*)^k a^l\sum\frac{(a^*)^n a^n}{n!}=(a^*)^k a^l\exp\{a^*a\}\end{aligned} \tag{2.21}$$

这就证实了（2.17）式。

（2.17）和（2.14）式使我们能够简单地将演化算符写成对函数 $a^*(t)$ 和 $a(t)$ 的路径积分形式。相应的推导实际上是重复第 2.1 节的论证。

设哈密顿量为

$$H = h(a^*, a), \tag{2.22}$$

其中假定了正规排列. 演化算符

$$U(\Delta t) = \exp\{-iH\Delta t\} \tag{2.23}$$

的核 $U(a^*, a, \Delta t)$ 对应于小 Δt 有如下形式

$$U(a^*, a, \Delta t) = \exp\{a^* a - ih(a^*, a)\Delta t\}. \tag{2.24}$$

对任意的间隔 $t'' - t' = N\Delta t$，必须计算 N 个这样的核的卷积：

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp\Big\{[a_N^* a_{N-1} - a_{N-1}^* a_{N-1} + \cdots - a_1^* a_1 + a_1^* a_0] - i[h(a_N^*, a_{N-1}) + \cdots + h(a_1^*, a_0)]\Delta t\Big\} \times \prod_{k=1}^{N-1} \frac{da_k^* da_k}{2\pi i}, \tag{2.25}$$

其中我们写 $a_0 = a$，$a_N^* = a^*$〔注〕。在 $\Delta t \to 0, N \to \infty$ 时的形式的极限可写为

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp\Big\{a^*(t'')a(t'')\Big\} \times \exp\left\{\int_{t'}^{t''} (-a^* \dot{a} - ih(a^*, a))dt\right\} \prod_t \frac{da^* da}{2\pi i}, \tag{2.26}$$

或者，对 a^* 和 a 对称化有

$$U(a^*, a; t'' - t') = \int \exp\left\{\frac{1}{2}\Big[a^*(t'')a(t'') + a^*(t')a(t')\Big]\right\}$$

〔注〕原书中为 $a_N = a^*$ ——译者

$$\times \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left[\frac{1}{2i}(\dot{a}^*a - a^*\dot{a}) - h(a^*, a)\right]dt\right\}$$

$$\times \prod_t \frac{da^*da}{2\pi i}, \tag{2.27}$$

其中假定 $a^*(t'') = a^*$, $a(t') = a$。

必须指出，(2.27) 式和前节中的对应公式 (1.16) 有点不同。两个公式中的被积函数都是泛函 $\exp\{i \times 作用量\}$，而积分都是对刘维测度在相空间中的乘积进行，但(2.27)式中多一个泛函

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\left[a^*(t'')a(t'') + a^*(t')a(t')\right]\right\}, \tag{2.28}$$

它反映了在进行积分的路径上边界条件的差别。在 (1.16) 式的情况下，我们固定同一个函数 $q(t)$ 在 $t = t'$ 和 $t = t''$ 的值；而在 (2.27) 式的情况下，在 $t = t'$ 时固定的是函数 $a(t)$ 的值，在 $t = t''$ 时固定的是函数 $a^*(t)$ 的值。必须指出，变量 $a^*(t'')$ 和 $a(t')$ 是独立的：我们对 $a(t'')$ 积分而保持 $a^*(t'')$ 固定不变。同样，对 $a^*(t')$ 积分而保持 $a(t')$ 不变。

在谐振动情况下，(2.27)式很容易计算，因为被积函数是一个非齐次二次型的指数函数。我们将称这样的积分为高斯型积分。我们利用高斯型积分的性质，即它等于被积函数在指数函数幂次的极值点上的值。在现在情况下，极值条件和经典运动方程符合[注]：

$$\dot{a}^*(t) - i\omega a^*(t) = 0;\quad \dot{a}(t) + i\omega a(t) = 0;$$

$$a^*(t'') = a^*;\quad a(t') = a, \tag{2.29}$$

因为，在 $\delta a^*|_{t''} = 0$，$\delta a|_{t'} = 0$ 的条件下，

$$\delta\left(a^*(t'')a(t'') + \int_{t'}^{t''}(-a^*\dot{a} - i\omega a^*a)dt\right)$$

$$= \int_{t'}^{t''}\Big(\delta a(\dot{a}^* - i\omega a^*) - \delta a^*(\dot{a} + i\omega a)\Big)dt. \tag{2.30}$$

[注] 为了避免符号的混淆，在运动方程中写明了宗量(t)。——译者

由方程（2.29）可以解出：

$$a(t)=e^{i\omega(t'-t)}a,\quad a^*(t)=e^{i\omega(t-t'')}a^*. \tag{2.31}$$

用 U_0 表示相应的演化算符，则有

$$U_0(a^*,a;t''-t')=\exp\left\{a^*ae^{i\omega(t'-t'')}\right\}. \tag{2.32}$$

如果 $f(a^*)$ 是一个任意函数，则

$$U_0(t)f(a^*)=\int\exp\left\{a^*ae^{-i\omega t}\right\}f(a^*)\,e^{-a^*a}\frac{da^*da}{2\pi i}$$

$$=f(a^*e^{-i\omega t}). \tag{2.33}$$

这一公式清楚地表明了对于谐振子使用全纯表象的方便之处．在这一表象中，任意状态的演化归结为在宗量中作代换：

$$a^*\longrightarrow a^*e^{-i\omega t}. \tag{2.34}$$

这一性质在场论中非常有用，因为在此情况下，自由哈密顿量可表为无穷多个振子的哈密顿量之和．

§2.3 场论中 S 矩阵的生成泛函

在场论中，全纯表象通过复振幅 $a^*(\vec{k})$和 $a(\vec{k})$ 引入．正则变量 $\varphi(\vec{x})$ 和 $\pi(\vec{x})$ 按如下方式用这些振幅表示：

$$\varphi(\vec{x})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\left(a^*(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}+a(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\vec{x}}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}},$$

$$\pi(\vec{x})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2}\int\left(a^*(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}-a(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$\times\, i\sqrt{\frac{\omega}{2}}d^3k, \tag{3.1}$$

$$k_0=\omega=(k^2+m^2)^{1/2}.$$

在量子化时，振幅 $a^*(\vec{k})$ 和 $a(\vec{k})$ 分别获得产生算符和湮灭算符的意义。

自由哈密顿量 H_0 用 a^* 和 a 表示如下：

$$H_0 = \int \omega(\vec{k}) a^*(\vec{k}) a(\vec{k}) d^3k, \tag{3.2}$$

它是无穷多个振子的能量之和。宗量 $\vec{k}$ 起振子标号的作用，而 $\omega(\vec{k})$ 是它的频率。完全的哈密顿量除了 H_0 项之外还包含相互作用 $V(a^*,a)$，它是通过将（3.1）式的函数 $\varphi(x)$ 代入 $\int V(\varphi)d^3x$ 而得。演化算符 $U(t'',t')$ 由核 $U(a^*(\vec{k}),a(\vec{k});t''-t')$ 决定，这个核可以用路径积分表示：

$$\begin{aligned}
&U(a^*(\vec{k}),a(\vec{k});t''-t') \\
&= \int \exp\Big\{\int d^3k a^*(\vec{k},t'')a(\vec{k},t'') + \int_{t'}^{t''}\Big[-iV(a^*,a) \\
&+ \int d^3k\Big(-a^*(\vec{k},t)\dot{a}(\vec{k},t) - i\omega a^*(\vec{k},t)a(\vec{k},t)\Big)\Big]dt\Big\} \\
&\times \prod_{t,\vec{k}} \frac{da^*(\vec{k},t)da(\vec{k},t)}{2\pi i}, \quad a^*(\vec{k},t'') = a^*(\vec{k}); \\
&a(\vec{k},t') = a(\vec{k}).
\end{aligned} \tag{3.3}$$

从这个公式很容易过渡到 S 矩阵. 为此，我们指出，对于任意一个有核 $A(a^*(\vec{k}),a(\vec{k}))$ 的算符 A，算符

$$e^{iH_0t''}Ae^{-iH_0t'} \tag{3.4}$$

有核

$$A(a^*(\vec{k})e^{i\omega t''},a(\vec{k})e^{-i\omega t'}). \tag{3.5}$$

这是对于前一节中（2.33）式的直接推广。这样，S 矩阵的核可以作为（3.3）式在 $t''\to\infty, t'\to-\infty$ 时的极限而得到。为了方便起见，将它改写为对称形式

$$S(a^*(k),a(k))$$

$$= \lim_{\substack{t''\to\infty \\ t'\to-\infty}} \int \exp\Big\{\frac{1}{2}\int d^3k\Big(a^*(\vec{k},t'')a(\vec{k},t'') + a^*(\vec{k},t')$$

$$\times a(\vec{k},t')\Big) + i\int_{t'}^{t''} dt\Big[\int d^3k\Big(\frac{1}{2i}(\dot{a}^*(\vec{k},t)a(\vec{k},t)$$

$$- a^*(\vec{k},t)\dot{a}(\vec{k},t)) - \omega(\vec{k})a^*(\vec{k},t)a(\vec{k},t)\Big)$$

$$- V(a^*,a)\Big]\Big\}\prod_{k,t}\frac{da^*(\vec{k},t)\,da(\vec{k},t)}{2\pi i} \qquad (3.6)$$

其中

$$a^*(\vec{k},t'') = a^*(\vec{k})\exp\{i\omega(\vec{k})t''\}, \qquad (3.7)$$

$$a(\vec{k},t') = a(\vec{k})\exp\{-i\omega(\vec{k})t'\}. \qquad (3.8)$$

我们用此公式来计算在外源 $\eta(x)$ 上散射的 S 矩阵。此时，

$$V(\varphi) = -\eta(\vec{x})\varphi(\vec{x}), \qquad (3.9)$$

相应的泛函 $V(a^*,\ a)$ 有如下形式

$$V(a^*,a) = \int d^3k\Big[\gamma(\vec{k},t)a^*(\vec{k}) + \gamma^*(\vec{k},t)a(\vec{k})\Big], \qquad (3.10)$$

其中

$$\gamma(\vec{k},t) = -\frac{1}{\sqrt{2k_0}}\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^{3/2}\int \eta(\vec{x},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}d^3\vec{x}. \qquad (3.11)$$

泛函 $V(a^*,a)$ 明显地依赖于时间。尽管如此，演化算符的所有公式在此情况下仍然是对的。唯一的变化是，演化算符现在是既依赖于 t'' 又依赖于 t'，而不是仅仅依赖于它们之间的差。在我们的情况下，(3.6) 式中的被积函数又具有非齐次二次型的指数函数的形式。极值条件如下：

$$\left.\begin{aligned} &\dot{a}(\vec{k},t) + i\omega(\vec{k})a(\vec{k},t) + i\gamma(\vec{k},t) = 0;\\ &\dot{a}^*(\vec{k},t) - i\omega(\vec{k})a^*(\vec{k},t) - i\gamma^*(\vec{k},t) = 0;\\ &a^*(\vec{k},t'') = a^*(\vec{k})e^{i\omega t''},\ \ a(\vec{k},t') = a(\vec{k})e^{-i\omega t'}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.12)$$

这组方程的解是

$$a^*(\vec{k},t) = a^*(\vec{k})e^{i\omega t} - ie^{i\omega t}\int_t^{t''} e^{-i\omega s}\gamma^*(\vec{k},s)\,ds, \qquad (3.13)$$

$$a(\vec{k},t) = a(\vec{k})e^{-i\omega t} - ie^{-i\omega t}\int_{t'}^{t} e^{i\omega s}\gamma(\vec{k},s)\,ds. \qquad (3.14)$$

将这些解代入（3.6）式的指数函数中，并进行极限过渡，得到 S 矩阵的核的下述表达式：

$$\begin{aligned}S_\eta(a^*,a) = \exp\Big\{\int d^3k\Big[&a^*(\vec{k})a(\vec{k})\\&+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int d^3x\,\eta(\vec{x},t)\,\frac{a^*(\vec{k})e^{i\omega t}e^{-i\vec{k}\vec{x}}+a(\vec{k})e^{-i\omega t}e^{i\vec{k}\vec{x}}}{\sqrt{2\omega}}\\&-\Big(\frac{1}{2\pi}\Big)^3\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-\infty}^{\infty}ds\int d^3x\int d^3y\,\frac{1}{2\omega}\eta(\vec{x},t)\eta(\vec{y},s)\\&\times e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}e^{-i\omega|t-s|}\Big]\Big\}\end{aligned} \qquad (3.15)$$

如果从核过渡到正规符号，S 矩阵的表达式会变得更加简炼。这等于略去第一个因子 $\exp\left\{\int d^3k\,a^*(\vec{k})\,a(\vec{k})\right\}$。剩下的因子可改写成明显相对论不变的形式。为此，我们引入克来因—哥登（Klein—Gordon）方程的解：

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(a^*(\vec{k})e^{ikx}+a(\vec{k})e^{-ikx}\right)\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}},$$

$$k_0 = \omega, \qquad (3.16)$$

$$\Box\varphi_0 + m^2\varphi_0 = 0, \qquad (3.17)$$

和这一方程的格林函数

$$D_c(x)=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int e^{ikx}e^{-i\omega|x_0|}\frac{d^3k}{2i\omega}$$

$$=-\left(\frac{1}{2\pi}\right)^4\int e^{-ikx}\frac{1}{k^2-m^2+i0}d^4k, \quad (3.18)$$

$$(\Box+m^2)D_c=\delta^4(x). \quad (3.19)$$

D_c 的头一个表达式由第二个表达式对 k_0 积分而得。

利用上述记号，S 矩阵的正规符号 $S_\eta(a^*,a)$ 由下式给出：

$$S_\eta(a^*,a)=\exp\left\{i\int\eta(x)\varphi_0(x)dx+\frac{i}{2}\int\eta(x)D_C(x-y)\right.$$
$$\left.\times\eta(y)dxdy\right\}. \quad (3.20)$$

应该指出，对积分路径渐近条件的适当选取，导致了在 S 矩阵的公式中出现因果格林函数。

现在来考虑具有一般的势 $V(\varphi)$ 情况下的 S 矩阵。在此情况下，显然不能严格地算出相应的路径积分，而只限于为它建立一个微扰论。可以证明，在此情况下，问题化为已经解出了的在外场中散射的问题。为此目的，利用一个显然的公式

$$\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)=\frac{1}{i}\;\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\cdots$$

$$\cdots\frac{1}{i}\;\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}\exp\left\{i\int\varphi(x)\,\eta(x)dx\right\}\Big|_{\eta=0}, \quad (3.21)$$

由此知，$\varphi(x)$ 的一个任意泛函 $\Phi(\varphi)$ 可以写成

$$\Phi(\varphi)=\Phi\left(\frac{1}{i}\;\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)\exp\left\{i\int\varphi(x)\eta(x)dx\right\}\Big|_{\eta=0}. \quad (3.22)$$

特别是，

$$\exp\left\{-i\int V(\varphi)dx\right\}$$

$$=\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta\eta}\right)dx\right\}\exp\left\{i\int\varphi\eta dx\right\}\bigg|_{\eta=0}. \qquad (3.23)$$

这一公式当然应在微扰论的意义下理解。

这样，在具有一般势的 S 矩阵的路径积分公式（3.6）式中，可以将被积函数中的 $\exp\{-i\int V(\varphi)dx\}$ 用（3.23）式的右方代替，并将形式的微分算符 $\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta\eta}\right)dx\right\}$ 提到路径积分之外。剩下的路径积分和已经算出了的在外源上散射的 S 矩阵的公式完全相同。其结果，得到 S 矩阵的正规符号的最终公式如下：

$$S(a^*,a)=S(\varphi_0)$$

$$=\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)dx\right\}\exp\left\{i\int\eta(x)\varphi_0(x)dx\right.$$

$$\left.+\frac{i}{2}\int\eta(x)D_c(x-y)\ \eta\ (y)dxdy\right\}\bigg|_{\eta=0}. \qquad (3.24)$$

这里，我们用一个单一的函数 φ_0 代替了一对宗量 a^*、a，因为它们相互单值地确定。将这一泛函展开为 φ_0 的级数[注]：

$$S(\varphi_0)\ =\sum_n\frac{(i)^n}{n!}\int S_n(x_1,\cdots,x_n)\varphi_0(x_1)$$

$$\cdots\varphi_0(x_n)dx_1\cdots dx_n, \qquad (3.25)$$

就得到系数函数 $S_n(x_1,\cdots,x_n)$. 在用算符方法进行量子化时，这些函数出现在将 S 矩阵展开为自由场算符正规乘积的级数中。由于这一原因，泛函 $S(\varphi_0)$ 有时被称为 S 矩阵系数函数的生成泛函。

将（3.24）式展开成微扰论的级数，就会出现通常的费曼图。这一问题留给读者去验证。函数 $D_c(x-y)$ 起传播子的作用，

[注] 原书(3.25)、(3.28)、(3.34)式中无 $(i)^n$. ——译者

顶角由势 $V(\varphi)$ 定义，而函数 φ_0 对应于外线．这样，(3.24) 式自动地考虑了编时乘积的维克（Wick）定理。

如果在 (3.24) 式中不假定 $\eta=0$，则所得到的泛函

$$S(\varphi_0,\eta)=\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)dx\right\}$$

$$\times\exp\left\{i\int\eta(x)\varphi_0(x)dx\right\}$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\int\eta(x)D_c(x-y)\eta(y)dxdy\right\} \tag{3.26}$$

是在有外源情况下相互作用粒子散射的 S 矩阵的正规符号．实际上，一般不是去处理 S 矩阵 (3.24)，而是处理下述泛函较方便：

$$Z(\eta)=\exp\left\{-i\int V\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)dx\right\}$$

$$\times\exp\left\{\frac{i}{2}\int\eta(x)D_c(x-y)\eta(y)dxdy\right\}. \tag{3.27}$$

它和 $\varphi_0=0$ 时的 $S(\varphi_0,\eta)$ 相吻合，它表示在有外源存在时由真空到真空的跃迁振幅．将这一泛函按 $\eta(x)$ 展成级数

$$Z(\eta)=\sum\frac{(i)^n}{n!}\int G_n(x_1,\cdots,x_n)\eta(x_1)\cdots\eta(x_n)dx_1\cdots dx_n, \tag{3.28}$$

其中的系数函数 $G_n(x_1,\cdots,x_n)$ 定义为所谓的格林函数。它与用算符进行量子化的理论体系中的海森伯 (Heisenberg) 场算符编时乘积的平均值相对应。特别是，格林函数在实现重整化方案时是必需的，这将在下一章中讨论．到现在为止，还没有能直接对 S 矩阵建立重整化方案．

泛函 $Z(\eta)$ 本身比 $S(\varphi_0)$ 包含更多的信息，因为它是对任意函数 η 定义的，而 $S(\varphi_0)$ 只定义在质壳上，即它的宗量 φ_0 是自由场运动方程的解。知道了泛函 $Z(\eta)$ 就能构造出 $S(\varphi_0)$．相

应的步骤由所谓的约化公式决定，该公式很容易通过比较(3.24)式和（3.27）式而推导出来。

为了得到明显的公式，我们将（3.24）中的φ_0换成四维变量的任意函数来引入推广的泛函$\tilde{S}(\varphi)$。此时，推广到离开质壳的系数函数是泛函导数

$$\tilde{S}_n(x_1,\cdots,x_n)=\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\varphi(x_n)}\tilde{S}(\varphi)\Big|_{\varphi=0}. \quad (3.29)$$

另一方面，可以用

$$\tilde{\eta}(x)=\int D_c(x-y)\eta(y)dy \quad (3.30)$$

来代替$\eta(x)$作为泛函$Z(\eta)$的宗量。通过直接比较可以验证[注]

$$\int\prod_i dx_i\,\varphi_0(x_i)\Big\{\frac{1}{i}\frac{1}{\delta\varphi(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{1}{\delta\varphi(x_n)}\tilde{S}(\varphi)\Big|_{\varphi=0}$$

$$-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\tilde{\eta}(x_n)}Z(\eta)\Big|_{\eta=0}\Big\}=0. \quad (3.31)$$

这样，我们就有了一个计算S矩阵正规符号的简单步骤：首先计算变分导数

$$\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}Z(\eta)\Big|_{\eta=0}, \quad (3.32)$$

(也就是格林函数$G_n(x_1,\cdots,x_n)$)，将微分算符

$$\prod_{i=1}^{n}(\Box_{x_i}+m^2) \quad (3.33)$$

作用到这一函数上，然后乘上

$$\frac{(i)^n}{n!}\prod_{i=1}^{n}\varphi_0(x_i), \quad (3.34)$$

〔注〕原书式（3.31）中$Z(\eta)$的宗量为$\tilde{\eta}$。——译者

再对所有的 x_i 积分，并对 n 求和。

计算 S 矩阵的另一种方案是直接以它在路径积分形式下的表示作基础。(3.6) 式难于达到这一目的，因为它不是明显相对论不变形式，并且包含一个极限过程。我们通过对动量 $\pi(\vec{x},t)$ 积分，使这一表达式变成明显相对论不变的形式。然而，必须准确地考虑边界项。

(3.6) 式中的作用量泛函可以用场 $\varphi(\vec{x},t)$ 和 $\pi(\vec{x},t)$ 改写为

$$\int d^3x\int_{t'}^{t''}\left[\frac{1}{2}(\pi\partial_0\varphi-\partial_0\pi\varphi)-\frac{1}{2}\pi^2-\frac{1}{2}(\partial_k\varphi)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}m^2\varphi^2-V(\varphi)\right]dt, \qquad (3.35)$$

用 φ 和 π 表示的积分测度为

$$\prod_{\substack{\vec{k},t\\ t'<t<t''}}\frac{da^*(\vec{k},t)da(\vec{k},t)}{2\pi i}$$

$$=\prod_{\substack{\vec{x},t\\ t'<t<t''}}\frac{d\varphi(\vec{x},t)d\pi(\vec{x},t)}{2\pi}. \qquad (3.36)$$

这里，我们利用了积分变量 $a^*(\vec{k},t),a(\vec{k},t)$ 和 $\pi(\vec{x},t),\varphi(\vec{x},t)$ 之间的关系：

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Big(a^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}\\&\quad+a(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}\Big)\frac{d^3x}{\sqrt{2\omega}},\\ \pi(\vec{x},t)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/3}}\int\Big(a^*(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}\\&\quad-a(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}\Big)i\sqrt{\frac{\omega}{2}}d^3k,\end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

$t=0$ 时的相应关系式已经在（3.1）式中引入过。

让我们在（3.6）式中，除了变量 $\varphi(\vec{x},t)$ 和 $\pi(\vec{x},t)$ 以外，也采用变量 $\varphi_1(\vec{x},t)$ 和 $\pi_1(\vec{x},t)$，它们由前者通过移动

$$\left.\begin{aligned}\varphi(\vec{x},t)&=\varphi_0(\vec{x},t)+\varphi_1(\vec{x},t),\\ \pi(\vec{x},t)&=\partial_0\varphi(\vec{x},t)+\pi_1(x,t)\end{aligned}\right\}\tag{3.38}$$

而得到。这里 $\varphi_0(\vec{x},t)=\varphi_0(x)$ 由包含在边界条件(3.7)和(3.8)式中的 $a^*(\vec{k})$ 和 $a(\vec{k})$ 按（3.16）式构成。通过分部积分可以将作用量(3.35)改变为用新变量表示的如下形式：

$$\int d^3x\left[\partial_0\varphi_0\varphi-\frac{1}{2}\partial_0\varphi_0\varphi_0-\frac{1}{2}\pi\varphi\right]\Bigg|_{t'}^{t''}$$

$$+\int d^3x\int_{t'}^{t''}dt\left[-\frac{1}{2}\pi_1^2+\frac{1}{2}(\partial_0\varphi_1\partial_0\varphi_1-\partial_k\varphi_1\partial_k\varphi_1)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}m^2\varphi_1^2-V(\varphi)\right].\tag{3.39}$$

特别是，我们看到，在第二项中，变量 φ 和 π_1 完全分离。利用(3.37）式、(3.16）式以及边界条件（3.7)、(3.8）式，可以将(3.39）式中积分外面的项改写如下：

$$i\int d^3x\left[\partial_0\varphi_0\varphi-\frac{1}{2}\partial_0\varphi_0\varphi_0-\frac{1}{2}\pi\varphi\right]\Bigg|_{t'}^{t''}$$

$$=\int d^3k\left[a^*(\vec{k})a(\vec{k})-\frac{1}{2}\Big(a^*(\vec{k},t'')a(\vec{k},t'')\right.$$

$$+a^*(\vec{k},t')a(\vec{k},t')\Big)-\Big(a(\vec{k},t'')-a(\vec{k})e^{-i\omega t''}\Big)^2$$

$$\left.-\Big(a^*(\vec{k},t')-a^*(\vec{k})e^{i\omega t'}\Big)^2\right].\tag{3.40}$$

在这里，我们暂时停止变换（3.6)式中的被积函数，而转过来讨论极限过程 $t''\to\infty$，$t'\to-\infty$。如果 $\pi_1(\vec{x},t)$ 在 t 大时减

小，使得

$$I(t)=\int \pi_1^2(\vec{x},t)d^3x \tag{3.41}$$

在 $|t|\to\infty$ 时是 t 的可积函数，则在积分 $\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\pi_1^2$ 中可以进行极限过渡。与这样的 $\pi_1(\vec{x},t)$ 有类似性质的函数以后将称为下降快的函数。如果约定 $\exp\{i\infty\}=0$，则那些使 $\int_{-\infty}^{\infty} I(t)\,dt=\infty$ 的 $\pi_1(\vec{x},t)$ 对 S 矩阵没有贡献。

边界条件 (3.7)，(3.8) 式决定了变量 $a^*(\vec{k},t)$ 在 $t\to\infty$ 时和 $a(\vec{k},t)$ 在 $t\to-\infty$ 时的渐近行为：

$$\left.\begin{aligned} a^*(\vec{k},t)&=a^*(\vec{k})e^{i\omega t}+a^*_{1,出}(\vec{k},t),t\to+\infty,\\ a(\vec{k},t)&=a(\vec{k})e^{-i\omega t}+a_{1,入}(\vec{k},t),t\to-\infty,\end{aligned}\right\} \tag{3.42}$$

其中 $a^*_{1,出}(\vec{k},t)$ 和 $a_{1,入}(\vec{k},t)$ 分别在 $t\to\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时是下降快的函数。

由 (3.42) 式可见，差值

$$\partial_0 a^*(\vec{k},t)-i\omega a^*(\vec{k},t) \text{ 和 } \partial_0 a(\vec{k},t)+i\omega a(\vec{k},t) \tag{3.43}$$

分别在 $t\to+\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时下降快。这样，根据 (3.37) 式知道，只有当

$$\left.\begin{aligned} \partial_0 a(\vec{k},t)+i\omega(\vec{k})a(\vec{k},t)&=a_1(\vec{k},t),\\ \partial_0 a^*(\vec{k},t)-i\omega(\vec{k})a^*(\vec{k},t)&=a_1^*(\vec{k},t),\end{aligned}\right\} \tag{3.44}$$

且 $a_1(\vec{k},t)$ 和 $a_1^*(\vec{k},t)$ 在 $t\to\infty$ 和 $t\to-\infty$ 时下降快，差值 $\pi-\partial_0\varphi=\pi_1$ 才会在 $|t|\to\infty$ 时下降快。

由 (3.44) 和 (3.42)[注] 式，积分变量 $\varphi(\vec{x},t)$ 在 $|t|\to\infty$ 时有渐近形式

$$\varphi(\vec{x},t)=\varphi_{0,\substack{入\\出}}(\vec{x},t)+\varphi_{1,\substack{入\\出}}(\vec{x},t),t\to\mp\infty, \tag{3.45}$$

其中，$\varphi_{1,入}(\vec{x},t)$ 在 $t\to-\infty$ 时下降快，$\varphi_{1,出}(\vec{x},t)$ 在 $t\to\infty$ 时下降快，而 $\varphi_{0,\substack{入\\出}}(\vec{x},t)$ 是自由场方程的解：

[注] 原书中为(3.41)。——译者

$$\Box\varphi_{0,\substack{入\\出}} + m^2\varphi_{0,\substack{入\\出}} = 0, \tag{3.46}$$

它们由下式给出：

$$\varphi_{0,\substack{入\\出}}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(a^*_{\substack{入\\出}}(\vec{k})e^{ikx} + a_{\substack{入\\出}}(\vec{k})\ e^{-ikx}\right)\Big|_{k_0=\omega}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \tag{3.47}$$

其中

$$a_{入}(\vec{k}) = a(\vec{k}),\ a^*_{出}(\vec{k}) = a^*(\vec{k}). \tag{3.48}$$

对函数 $a_{出}(\vec{k})$ 和 $a^*_{入}(\vec{k})$ 不加条件。

如果积分变量有以上的渐近行为，则（3.40）式右边的后两项在$t''\to\infty$，$t'\to-\infty$时为零。实际上，我们有，例如〔注〕

$$\int d^3k\left(a^*(\vec{k},t') - a^*(\vec{k})e^{i\omega t'}\right)^2 = \int d^3k\Big[(a^*_{入}(\vec{k}) - a^*(\vec{k}))^2e^{2i\omega t'}$$

$$+ 2((a^*_{入}(\vec{k}) - a^*(\vec{k}))\ e^{i\omega t'}a^*_1(\vec{k},t') + a^{*2}_1(\vec{k},t')\Big]. \tag{3.49}$$

由于 $a^*_1(\vec{k},t')$ 在 $t'\to-\infty$ 时下降快，上式右边的后两项在 $t'\to-\infty$ 时为零；而由黎曼-勒贝格(Riemann-Lebesgue) 引理，上式右边的第一项因为 $\exp\{2i\omega t'\}$ 的振荡而为零。

现在，让我们将不为零的项的贡献集合到S矩阵中。注意，(3.40) 式中的第二项和（3.6）式中的边界项消去。其结果，得到S矩阵的核的下述表达式：

$$S(a^*,a) = \exp\left\{\int a^*(\vec{k})a(\vec{k})d^3k\right\}\int\exp\left\{i\int dx\Big[-\frac{1}{2}\pi_1^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1 - \frac{m^2}{2}\varphi_1^2 - V(\varphi)\Big]\right\}\prod_x\frac{d\varphi(x)d\pi(x)}{2\pi}, \tag{3.50}$$

其中用了相对论的符号 $x=(\vec{x},t)$。变量 $\varphi_1(x)$、$\pi_1(x)$ 通过(3.38) 式和 $\varphi(x)$、$\pi(x)$ 相联系。

在（3.50）式中，变量π_1和φ完全分离，因而可以明显地对π_1积分。加在π_1上的边界条件不依赖于$a^*(\vec{k})$和$a(\vec{k})$；因

〔注〕下式右边的$a^*_1(\vec{k},t')$在原书中为$a_1(\vec{k},t')$。——译者

此，积分

$$N^{-1}=\int\exp\left\{-i\int\frac{1}{2}\pi_1^2dx\right\}\prod_x\frac{d\pi_1(x)}{2\pi} \tag{3.51}$$

只不过表示一个归一化常数。

当我们从 S 矩阵的核过渡到正规符号时，(3.50) 式中的第一个因子被去掉。其结果，对于正规符号可得到下述明显相对论不变的表达式：

$$S(\varphi_0)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1-\frac{1}{2}m^2\varphi_1^2\right.\right.$$

$$\left.\left.-V(\varphi)\right]\right\}\prod_x d\varphi(x), \tag{3.52}$$

其中积分对于所有的渐近行为如 (3.45)—(3.48) 式所示的场 $\varphi(x)$ 进行，而

$$\varphi_1(x)=\varphi(x)-\varphi_0(x). \tag{3.53}$$

比较 (3.45) 和 (3.16) 式可以看出，φ_1 有下述渐近行为：

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int b^*(\vec{k})\,e^{ikx}\Big|_{k_0=-\omega}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\\&\quad+\varphi_{2,入}(x),\ t\to-\infty,\\\varphi_1(x)&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int b(\vec{k})\,e^{-ikx}\Big|_{k_0=\omega}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}\\&\quad+\varphi_{2,出}(x),\ t\to\infty,\end{aligned}\right\} \tag{3.54}$$

其中，$\varphi_{2,\substack{入\\出}}(x)$ 在 $t\to\mp\infty$时下降快。我们称 (3.54) 式的 $\varphi_1(x)$ 满足费曼辐射条件。在这一种理论方案中，$\varphi_1(x)$在$t\to-\infty$时没有入射波，而在 $t\to\infty$ 时没有出射波。变量 $\varphi(\vec{x},t)$ 的入射和出射波完全由解 $\varphi_0(x)$ 决定。

当作用在满足辐射条件的函数 $\varphi_1(x)$ 上时，克来因—哥登

算符$\Box+m^2$是对称的：

$$\int\varphi_1(\Box+m^2)\varphi_1'dx=\int[(\Box+m^2)\varphi_1]\varphi_1'dx$$

$$=-\int(\partial_\mu\varphi_1\partial_\mu\varphi_1'-m^2\varphi_1\varphi_1')dx. \qquad (3.55)$$

实际上，当算符$\Box$的作用由φ_1'转到φ_1时，分部积分出来的积分外面的项有如下形式

$$\int d^3x\varphi_1\partial_0\varphi_1'\Big|_{t'}^{t''}$$

$$=i\int d^3k[b^*(\vec{k})b'^*(-\vec{k})e^{2i\omega t''}-b(\vec{k})b'(-\vec{k})e^{-2i\omega t'}]+\cdots, \qquad (3.56)$$

其中，"…"代表包含$\varphi_{2,\text{入}\atop\text{出}}$的项．由于在（3.49）式后面讲过的原因，（3.56）式在$t''\to\infty$，$t'\to-\infty$时为零。这样，（3.52）式中的二次型由克来因—哥登方程在满足辐射条件的函数$\varphi_1(x)$的空间中的二次型唯一地确定．

算符$\Box+m^2$的作用将使满足辐射条件的函数转化为下降快的函数，且这一作用是可逆的．方程

$$(\Box+m^2)\varphi=\eta \qquad (3.57)$$

（其中φ满足辐射条件，而η下降快）有唯一的解

$$\varphi(x)=\int D_c(x-y)\eta(y)dy, \qquad (3.58)$$

函数$D_c(x)$在（3.18）式中已经引入过．

（3.52）式可以改写成更明显的形式：

$$S(\varphi_0)=N^{-1}\int_{\varphi\to\varphi_{\text{入,出}}}\exp\left\{i\int\mathscr{L}(x)dx\right\}\prod_x d\varphi(x), \qquad (3.59)$$

其中，作用量$\int\mathscr{L}(x)dx$中的二次型必须理解为已经正规化，使得

$$\int(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi - m^2\varphi^2)\,dx$$

$$= \int[\partial_\mu(\varphi-\varphi_0)\partial_\mu(\varphi_0-\varphi) - m^2(\varphi-\varphi_0)^2]\,dx. \quad (3.60)$$

进行分部积分，略去积分外面的项，就能形式地将上式左边转化成右边。

以（3.59）式为出发点可以建立一种和上面描述过的费曼微扰论有些不同的计算 S 矩阵的方案。这一方案称为圈展开，其基础是对（3.59）式形式地应用稳相法。我们不讨论这一方案，而只讨论费曼微扰论。

利用（3.59）式也容易写出用路径积分表示的格林函数生成泛函的表达式。因为 $Z(\eta)$ 是有源 $\eta(x)$ 存在时由真空到真空的跃迁振幅，所以有

$$Z(\eta) = N^{-1}\int\exp\left\{ i\int\left[\mathscr{L}(x) + \eta(x)\varphi(x)\right]dx\right\}\prod_x d\varphi(x), \quad (3.61)$$

其中积分是对满足辐射条件的场 $\varphi(x)$ 进行。

（3.59）和（3.61）式是紧凑而清楚的。$Z(\eta)$ 表示为积分的形式使得能够应用微积分的简单公式：分部积分、改变积分次序、变量代换和用稳相法计算。不幸的是，正如前面已经讲过的，在中间项中这一积分的定义目前还不存在，而只有有了这一定义才能使所有这些形式变换变得严格。然而，在微扰论的框架中，利用将 $Z(\eta)$ 用变分导数表示的（3.27）式能够赋予(3.61)式以严格的意义。

在这一式子的基础上，可以对加在（3.61）式上的所有上述运算给出严格的证明。这将在第 2.5 节中进行。

§2.4 对费米场的路径积分

前几节所讲的方法可以不加改变地应用于几个不相互作用的标量场，也可以应用到其他玻色(Bose)场，包括下一章将要详细讨

论的矢量场．在这一节里，我们将证明，对于费米(Fermi)场，也可以建立起这样一种路径积分方法，并且相应的动力学公式(演化算符，S矩阵)看起来实际上和玻色场情况相同．

我们从一个自由度的费米系统开始．这一系统的状态空间是二维的．有两个算符 a^* 和 a 作用在这一空间中，它们相互共轭并满足下述对易规律：

$$a^* a + a a^* = 1; \quad (a^*)^2 = 0; \quad a^2 = 0. \tag{4.1}$$

这两个算符可以用 2×2 矩阵表示：

$$\vec{a}^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

路径积分的公式推导基于算符 a^*、a 的另一表象，它非常类似于全纯表象．让我们考虑两个反对易变量 a^* 和 a

$$a^*a + aa^* = 0; \quad (a^*)^2 = 0; \quad a^2 = 0 \tag{4.3}$$

这样的变量称为格拉斯曼(Grassman)代数的生成元．这一代数的一般元素(生成元的函数)由下式给出

$$f(a^*, a) = f_{00} + f_{01}a + f_{10}a^* + f_{11}aa^*, \tag{4.4}$$

其中 f_{00}、f_{01}、f_{10}，f_{11} 是复数．我们将称仅仅依赖于 a^* 的函数为**全纯函数**：

$$f(a^*) = f_0 + f_1 a^*. \tag{4.5}$$

这种函数的集合形成一个二维空间，我们将利用它来表示系统的态矢量．

取算符 a^* 和 a 为以下形式：

$$a^* f(a^*) = a^* f(a^*); \quad a f(a^*) = \frac{d}{da^*} f(a^*), \tag{4.6}$$

其中微分很自然地用下式定义

$$\frac{d}{da^*}(f_0 + f_1 a^*) = f_1. \tag{4.7}$$

容易验证对易关系（4.1）式确实成立。下一个任务是要引入全纯函数空间中的标积，使得 a^* 和 a 相互共轭。我们将通过给(4.4)式形式的函数对 da^*da 的积分下一个简便的定义来做到这一点。

假定 da^* 和 da 相互反对易，也和 a 、a^* 反对易。定义下述简单的积分：

$$\int a^* da^* = 1; \quad \int a da = 1; \quad \int da^* = 0; \quad \int da = 0. \tag{4.8}$$

后两个公式的明显意义是，全微分的积分等于零。如果约定，多重积分理解为重复的积分，则以上这些规律足以确定对任意函数的积分。这样就有

$$\int f(a^*, a) da^* da = f_{11}. \tag{4.9}$$

所要找的标积由下式给出：

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-a^* a} da^* da, \tag{4.10}$$

其中被积函数的第一个因子为

$$(f(a^*))^* = f_0^* + f_1^* a. \tag{4.11}$$

让我们检验这一标积的正定性。为此目的，我们来证明单项式

$$\psi_0 = 1; \quad \psi_1 = a^* \tag{4.12}$$

是正交归一的。我们有

$$(\psi_0, \psi_0) = \int e^{-a^* a} da^* da = \int (1 - a^* a) da^* da = 1; \tag{4.13}$$

$$(\psi_0, \psi_1) = \int a^* e^{-a^* a} da^* da = 0; \tag{4.14}$$

$$(\psi_1, \psi_1) = \int a a^* e^{-a^* a} da^* da = 1. \tag{4.15}$$

算符 a^* ，a 相互共轭可由下述事实看出，即：在用 ψ_0、ψ_1，为基底时它们由矩阵(4.2)给出。实际上，

$$\left.\begin{array}{ll} a^*\psi_0=\psi_1; & a^*\psi_1=0; \\ a\psi_0=0; & a\psi_1=\psi_0. \end{array}\right\} \tag{4.16}$$

应用上述积分规则去计算宗量为非齐次二次型的指数函数的积分：

$$\int \exp\{a^*Aa+a^*b+b^*a\}da^*da, \tag{4.17}$$

其中 b 和 b^* 相互反对易，也和 a^*，a 反对易。

根据(4.9)式，我们可以将(4.17)式中的积分变量平移：

$$a^*\to a^*-A^{-1}b^*,\quad a\to a-A^{-1}b, \tag{4.18}$$

因为被积函数中 a^*a 的系数在这一移动下不变，在这样移动后，(4.17)式成为如下形式

$$\begin{aligned}\exp\{-b^*A^{-1}b\}\int &\exp\{a^*Aa\}da^*da\\ &=-A\exp\{-b^*A^{-1}b\}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

注意，(4.19)式看起来完全象对可对易变量积分的公式，只不过因子 A 在分子中而不象可对易变量的情况那样在分母中。

现在来描述在所考虑的表象中定义算符的方法. 普遍形式的算符有如下形式：

$$\mathbf{A}=K_{00}+K_{10}a^*+K_{01}a+K_{11}a^*a. \tag{4.20}$$

和它相关联有格拉斯曼代数上的两个函数：正规符号

$$K(a^*,a)=K_{00}+K_{10}a^*+K_{01}a+K_{11}a^*a \tag{4.21}$$

和核

$$A(a^*,a)=A_{00}+A_{10}a^*+A_{01}a+A_{11}a^*a, \tag{4.22}$$

其中 A_{nm}，$n,m=0,1$ 是算符 $\mathbf{A}$ 在基底 ψ_0,ψ_1 中的矩阵元：

$$A_{nm}=\langle\psi_n|\mathbf{A}|\psi_m\rangle. \tag{4.23}$$

显然，

$$(\mathbf{A}f)\ (a^*)=\int A(a^*,\alpha)f(\alpha^*)e^{-\alpha^*\alpha}d\alpha^*d\alpha; \tag{4.24}$$

$$(A_1 A_2)(a^*, a) = \int A_1(a^*, \alpha) A_2(\alpha^*, a) e^{-\alpha^* \alpha} d\alpha^* d\alpha. \tag{4.25}$$

为了写下这些公式，我们引入了新的反对易变量α^*，α. 按定义，α^*，α与a^*，a反对易.

一个给定算符**A**的正规符号$K(a^*,a)$和核$A(a^*,a)$由下式相联系

$$A(a^*, a) = e^{a^* a} K(a^*, a). \tag{4.26}$$

为了证明这一论断，只需比较(4.21)和(4.22)式中的系数K_{nm}和A_{nm}，并验证下式即可，

$$K_{00} = A_{00}; \quad K_{01} = A_{01}; \quad K_{10} = A_{10};$$

$$K_{11} = A_{11} - A_{00}. \tag{4.27}$$

以上所有公式很容易推广到n个自由度的情况. 为此目的，需要用$2n$个反对易变量

$$a_1, \cdots, a_n; \; a_1^*, \cdots, a_n^*. \tag{4.28}$$

态矢量的空间由解析函数$f(a^*)$组成，并有2^n维. 算符$\boldsymbol{a}_i^*$，$\boldsymbol{a}_i$，$i = 1, \cdots, n$，按以下规则作用

$$\boldsymbol{a}_i f(a^*) = \left(\frac{\partial}{\partial a_i^*}\right)_L (a^*); \boldsymbol{a}_i^* f(a^*) = a_i^* f(a^*), \tag{4.29}$$

其中下标L表示，在函数$f(a^*)$对a_i^*微分时，要将变量a_i^*移到左边，然后才消去它.

以上引入的算符满足对易关系：

$$\boldsymbol{a}_i^* \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_i^* = \delta_{ik}; \quad \boldsymbol{a}_i^* \boldsymbol{a}_k^* + \boldsymbol{a}_k^* \boldsymbol{a}_i^* = 0; \quad \boldsymbol{a}_i \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{a}_k \boldsymbol{a}_i = 0, \tag{4.30}$$

并对标积

$$(f_1, f_2) = \int (f_1(a^*))^* f_2(a^*) e^{-\Sigma a^* a} \prod da^* da \tag{4.31}$$

而言，相互共轭. 其中运算$*$按下式定义：

$$(C a_{i_1}^* \cdots a_{i_r}^*)^* = C^* a_{i_r} \cdots a_{i_1},$$

而积分和前面一样进行。

对任意函数 $f(a^*,a)$的积分等于

$$\int f(a^*,a)\prod da^*da=f_{1\cdots n,n\cdots 1},\tag{4.33}$$

其中 $f_{1\cdots n,n\cdots 1}$ 是将 f 用生成元展开时的单项式 $a_1\cdots a_n a_n^*\cdots a_1^*$ 的系数[注]. 高斯型积分

$$\int\exp\left\{a_i^*A_{ik}a_k+a_i^*b_i+b_i^*a_i\right\}\prod_i da_i^*da_i\tag{4.34}$$

就象在一个自由度情况那样，用移动来计算，且等于

$$\exp\left\{-b_i^*(A^{-1})_{ik}b_k\right\}\int\exp\left\{a_i^*A_{ik}a_k\right\}\prod_i da_i^*da_i.\tag{4.35}$$

根据(4.33)式，上式待积的积分等于$\det A(-1)^n$.必须指出，答案中的指数函数可以通过将下述方程的解代入被积函数中而得到：

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d}{da_i^*}\right)_L(a_i^*A_{ik}a_k+a_i^*b_i+b_i^*a_i)=0;\\ \left(\frac{d}{da_i}\right)_L(a_i^*A_{ik}a_k+a_i^*b_i+b_i^*a_i)=0.\end{aligned}\right\}\tag{4.36}$$

这一性质对于可对易变量和不可对易变量的高斯型积分都是普遍正确的. 下面我们将经常用到它.

单项式

$$\psi_{i_1,\cdots,i_r}=a_{i_1}^*,\cdots,a_{i_r}^*(i_1<i_2<\cdots<i_r)\tag{4.37}$$

是正交归一的，并组成状态空间的基底.

与在一个自由度的情况一样，任意的算符**A** 能够用正规符号 $K(a^*,a)$或核 $A(a^*,a)$ 表示. 如果算符**A**由下式给出：

$$\mathbf{A}=\sum_{r,t}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_t}}K_{i_1\cdots i_r|j_1\cdots j_t}a_{i_1}^*\cdots a_{i_r}^*a_{j_t}\cdots a_{j_1},\tag{4.38}$$

[注] 原书中为$a_1\cdots a_n a_n^*\cdots a_1$. ——译者

则

$$K(a^*,a)=\sum_{r,t}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_t}}K_{i_1\cdots i_r|j_1\cdots j_t}a^*_{i_1}\cdots a^*_{i_r}a_{j_1}\cdots a_{j_t}, \qquad (4.39)$$

且

$$A(a^*,a)=\sum_{r,t}\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_r\\ j_1<\cdots<j_t}}A_{i_1\cdots i_r|j_1\cdots j_t}a^*_{i_1}\cdots a^*_{i_r}a_{j_1}\cdots a_{j_t}, \qquad (4.40)$$

其中

$$A_{i_1\cdots i_r|j_1\cdots j_t}=\langle\psi_{i_1\cdots i_r}|\mathbf{A}|\psi_{j_1\cdots j_t}\rangle. \qquad (4.41)$$

核和正规符号的关系为：

$$A(a^*,a)=e^{\Sigma a_i^* a_i}K(a^*,a). \qquad (4.42)$$

算符对函数的作用和算符的乘积由下式给出：

$$(\mathbf{A}f)(a^*)=\int A(a^*,\ a)f(a^*)e^{-\Sigma a^*a}\prod da^*da; \qquad (4.43)$$

$$(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)(a^*,a)=\int A_1(a^*,a)A_2(a^*,a)e^{-\Sigma a^*a}\prod da^*da. \qquad (4.44)$$

将以上公式和第 2.2 节中推出的(2.11)，(2.14)式对比，可以看出它们有相同的形式。仔细检查用路径积分表示演化算符的核的推导过程，可以看出这一推导完全建立在(2.17)式和(2.14)式之上。在费米子情况下，我们有完全相同的公式(4.42)和(4.44)式。因此，具有哈密顿量 $h(a^*,a,t)$的费米系统的演化算符的核可以立刻写下来：

$$U(a^*,a;t'',t')=\int\exp\Big\{-\frac{1}{2}\sum_k(a_k^*(t'')a_k(t'')+a_k^*(t')a_k(t'))+i\int_{t'}^{t''}\Big[\frac{1}{2i}\sum_k(a_k^*\dot{a}_k-\dot{a}_k a_k)-h(a^*(t),a(t),t)\Big]dt\prod_{t,k}da^*da, \qquad (4.45)$$

其中假定

$$a_k^*(t'')=a_k^*\ ;\ a_k(t')=a_k. \tag{4.46}$$

必须指出，我们这里所处理的积分是在无穷维格拉斯曼代数上的积分，这一代数对于 $t'\leqslant t\leqslant t''$ 的每一个 t 有独立的生成元 $a_k^*(t)$，$a_k(t)$，$k=1,\cdots,n$。

现在过渡到场论。一个复旋量场可以看成为一个具有无穷多自由度的费米子系统。在此情况下，格拉斯曼代数的生成元是反对易函数 $\psi(\vec{x})$，$\psi(\vec{x})$或与它有线性关系的函数 $b_i(\vec{k})$，$b_i^*(\vec{k})$，$c_i(\vec{k})$，$c_i^*(\vec{k})$，$i=1,2$：

$$\psi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(e^{-i\vec{k}\vec{x}}u_i(\vec{k})\,b_i^*(\vec{k})+e^{i\vec{k}\vec{x}}v_i(\vec{k})c_i(\vec{k})\right)d^3k,$$

$$\psi^*(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left(e^{i\vec{k}\vec{x}}u_i^*(\vec{k})b_i(\vec{k})+e^{-i\vec{k}\vec{x}}v_i^*(\vec{k})\,c_i^*(\vec{k})\right)d^3k, \tag{4.47}$$

其中$u_i(\vec{k})$，$v_i(\vec{k})$是狄拉克方程

$$\left.\begin{aligned}&(\gamma_\mu k_\mu-m)u_i(\vec{k})\Big|_{k_0=\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}=0;\\&(\gamma_\mu k_\mu-m)v_i(\vec{k})\Big|_{k_0=-\sqrt{\vec{k}^2+m^2}}=0;\end{aligned}\quad (i=1,2).\right\} \tag{4.48}$$

的两对线性独立的解。正规乘积可以和通常一样用生成元 b，b^*，c，c^* 来定义，那就是说，在任意算符用核$A(b^*,c^*;b,c)$或正规符号 $K(b^*,c^*;b,c)$ 表示的表达式中，生成元 b^*，c^* 应该放在 b，c 的左边。

让我们来考虑和外源相互作用的费米场系统。作为外源，取反对易旋量函数 $\xi(x)$，$\bar{\xi}(x)$。这一系统的哈密顿量有如下形式：

$$\begin{aligned}h&=\int(i\bar{\psi}(\vec{x})\gamma_k\partial_k\psi(\vec{x})+m\bar{\psi}(\vec{x})\psi(x)+\bar{\psi}(\vec{x})\xi(x)+\bar{\xi}(x)\psi(\vec{x}))d^3x\\&=\int\Big[\sqrt{\vec{k}^2+m^2}(b_i^*(\vec{k})b_i(\vec{k})+c_i^*(\vec{k})c_i(\vec{k}))+\gamma_i^*(\vec{k},t)b_i\\&\quad+b_i^*\gamma_i(\vec{k},t)+\delta_i^*(\vec{k},t)c_i(\vec{k})+c_i^*(\vec{k})\delta_i(\vec{k},t)\Big]d^3k\end{aligned} \tag{4.49}$$

其中在转到动量表象时，应用了旋量 u_i 和 v_i（$i=1,2$)的正交归一性质，且

$$\left.\begin{aligned}&\gamma_i(\vec{k},t)=u_i^*\tilde{\xi}(\vec{k},t);\quad \delta_i(\vec{k},t)=v_i^*\tilde{\xi}(\vec{k},t),\\&\tilde{\xi}(\vec{k},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\xi(\vec{x},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}d^3x.\end{aligned}\right\}\tag{4.50}$$

在路径积分形式下的 S 矩阵由下式给出[注]：

$$\begin{aligned}S(b^*,c^*;b,c)=\lim_{\substack{t''\to\infty\\t'\to-\infty}}\int\exp\Big\{\frac{1}{2}\int d^3k(b_i^*(\vec{k},t'')b_i(\vec{k},t'')\\+b_i^*(\vec{k},t')b_i(\vec{k},t')+(b\longleftrightarrow c)+i\int_{t'}^{t''}d\tau\\\Big[\Big[\int d^3k\frac{1}{2i}(\dot{b}_i^*(\vec{k},t)b_i(\vec{k},t)-b_i^*(\vec{k},t)\dot{b}_i(\vec{k},t)\\+(b\longleftrightarrow c)-h(b^*,b,c^*,c)\Big]\Big]\Big\}\end{aligned}\tag{4.51}$$

它是高斯型的，可以用计算标量场的相应积分(3.6)，(3.15)式完全相同的方法算出。正规符号的表达式可以写成明显相对论不变的形式：

$$\begin{aligned}S_{正规}(\bar{\xi},\xi;b^*,b,c^*,c)=\exp\Big\{i\int\bar{\xi}(x)S_c(x-y)\xi(y)dxdy\\+i\int(\bar{\xi}(x)\psi_0(x)+\bar{\psi}_0(x)\xi(x))dx\Big\},\end{aligned}\tag{4.52}$$

其中，

$$\begin{aligned}S_c(x-y)&=\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{1}{i}\int e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})}e^{-ik_0|x_0-y_0|}\Big(v_i(\vec{k})\otimes v_i^*(\vec{k})\\&\quad+u_i(\vec{k})\otimes u_i^*(\vec{k})\Big)d^3k\\&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int(\gamma_\mu k_\mu-m+i0)^{-1}e^{-ik(x-y)}d^4k\end{aligned}\tag{4.53}$$

[注] 原书中第二个 d^3k 积分的被积函数为 $\frac{1}{2i}(\dot{b}_i^*(\vec{k},t)b_i(\vec{k},t)-b_i^*(\vec{k},t)b_i(\vec{k},t)+\cdots)$。——译者

是狄拉克方程的因果格林函数，而

$$\psi_0(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(b_i^*(\vec{k})u_i(\vec{k})e^{ikx}$$
$$+v_i(\vec{k})c_i(\vec{k})e^{-ikx})|_{k_0=w}d^3k \tag{4.54}$$

是自由狄拉克方程的解：

$$(i\gamma_\mu\partial_\mu-m)S_c(x)=\delta(x),\quad (i\gamma_\mu\partial_\mu-m)\psi_0=0. \tag{4.55}$$

为了从(4.53)式中 S_c 的第一表达式过渡到第二表达式，又一次利用了旋量 u_i,v_i 的性质。从第一表达式可以清楚了解，在什么意义上格林函数 S_c 是因果的，那就是

$$\psi_1(x)=\int S_c(x-y)\xi(y)d^4y \tag{4.56}$$

在 $t\to-\infty(t\to\infty)$ 时没有入射(出射)波.

(4.52)式可以作为旋量场 S 矩阵的微扰展开推导的基础，该旋量场与自身或其它场相互作用. 为此，我们指出

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi(x)}\right)_L&\exp\left\{i\int(\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi)dx\right\}\\&=\psi(x)\exp\left\{i\int(\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi)dx\right\},\\\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi(x)}\right)_R&\exp\left\{i\int(\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi)dx\right\}\\&=\exp\left\{i\int(\bar{\xi}\psi+\bar{\psi}\xi)dx\right\}\bar{\psi}(x),\end{aligned}\right\} \tag{4.57}$$

其中,右手导数的定义由左手导数的定义作自然的改变而得到.这两个公式和(4.52)式一道，使我们能够将场 $\bar{\psi},\psi,\varphi$ 之间有任意相互作用情况下的 S 矩阵的路径积分，约化为有外源的 S 矩阵的路径积分。旋量场的格林函数和约化公式可以从标量场的公式加以自然的修改而得到。

在结束关于旋量场的讨论时，我们给出以最简单方式进行相互作用的旋量场和标量场的拉格朗日函数

$$\mathscr{L}(x)=\bar{\psi}(x)i\gamma_\mu\partial_\mu\psi(x)-m\bar{\psi}(x)\psi(x)+\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi(x)\partial_\mu\varphi(x)$$

$$-\frac{1}{2}m^2\varphi^2(x)-g\bar{\psi}(x)\psi(x)\varphi(x) \tag{4.58}$$

所对应的格林函数的生成泛函。这一泛函由下式给出：

$$Z(\eta,\bar{\xi},\xi)=\exp\left\{-ig\int\frac{1}{i}\left(\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}(x)}\ \frac{\delta}{\delta\xi(x)}\ \frac{\delta}{\delta\eta(x)}\right)\right.$$

$$\left.\times dx\right\}\times\exp\left\{i\iint\left(\bar{\xi}(x)S_c(x-y)\xi(y)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2}\eta(x)D(x-y)\eta(y)\right)dxdy\right\}, \tag{4.59}$$

并能写成路径积分形式

$$Z(\eta,\bar{\xi},\xi)=\frac{1}{N}\int\exp\left\{i\int(\mathscr{L}(x)+\eta\varphi+\bar{\xi}\psi\right.$$

$$\left.+\bar{\psi}\xi)dx\right\}\prod_x d\bar{\psi}d\psi d\varphi, \tag{4.60}$$

其中，积分遍及场$\bar{\psi}(x)$，$\psi(x)$，$\varphi(x)$，这些场在$t\to-\infty(t\to\infty)$的渐近情况下，没有入射波（出射波）。

§2.5 路径积分的微扰论性质

如前所述，到目前为止，中间项中的路径积分还没有定义。然而，对于量子场论的微扰论来说，只要能处理一种特殊类型的路径积分——即高斯型积分就够了。对于这样的积分，能够发展一套计算和变换的技巧，以紧凑而清楚的形式包含微扰论中的全部图形规则。

以格林函数的生成泛函为例，推导标量场情况下的运算规则。这种泛函有两个等效的表示：路径积分形式的（3.61）式和明显的（3.27）式。我们将用（3.27）式作为高斯型路径积分的定义。更确切地说，我们将假定

$$\int \exp\left\{ i \left(\int \frac{1}{2}\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right.\right.$$

$$\left.\left.+ i\int \varphi(x)\eta(x)dx\right\}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\prod_x d\varphi(x)\right.$$

$$= (-i)^n \frac{\delta}{\delta\eta(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta\eta(x_n)}$$

$$\times \exp\left\{-\frac{i}{2}\int \eta(x)K^{-1}(x-y)\eta(y)dxdy\right\}. \tag{5.1}$$

按定义，对 $d\varphi$ 的积分和对 dx 的积分以及对外源 $\eta(x)$ 的微分是可交换的，并且假定带有核 $K(x-y)$ 的算符 K 有一个逆算符 K^{-1}，其核为 $K^{-1}(x-y)$：

$$\int K(x-z)K^{-1}(z-y)\,dz = \int K^{-1}(x-z)K(z-y)dz$$

$$= \delta(x-y). \tag{5.2}$$

我们将把核 $K^{-1}(x-y)$ 看成为足够光滑的函数。进入生成泛函 $Z(\eta)$ 中的函数 $D_c(x-y)$ 自然没有这样的性质。这种发散用重整化消除，这一问题将在第四章中讨论。重整化的第一步是引入一种中间的正规化，它将函数 $D_c(x-y)$ 用一个光滑函数代替。因此，下面将要进行的讨论适用于正规化了的微扰论。

进行积分的 $\varphi(x)$ 的函数类必须保证K的逆算符有唯一的定义。如果 $K=\Box$，则这一条件是已经说过的因果条件：当 $|t|\to\infty$ 时，$\varphi(x)$ 的渐近行为趋近于在 $t\to-\infty$ 时没有入射波，在 $t\to\infty$ 时没有出射波的自由场方程的解。在此情况下，算符 K^{-1} 是带有核 D_c（更精确地说，如已指出的那样，是正规化了的 D_c）的积分。我们则将称 $\eta=0$ 时的（5.1）式中的被积函数为高斯型泛函。

现在我们来讨论由（5.1）式定义的路径积分。

首先应当指出，(5.1)式可以很自然地称为高斯型泛函

$$F(\varphi)=\exp\left\{i\int\frac{1}{2}\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\}\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n) \tag{5.3}$$

的富里叶 (Fourier) 变换，并且它本身就是一个高斯型泛函，因为通过微分 $\exp\left\{\int\eta K^{-1}\eta dxdy\right\}$，我们得到一个指数函数乘上多项式的表达式。

现在来证明，在上述定义下能够对 (5.1) 式进行一系列最简单的变换，诸如：分部积分，变量代换以及引进 δ 函数泛函的概念。

1. 分部积分

考虑积分

$$I=\int\left[\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\}\right]\times\exp\left\{i\int\varphi(x)\eta(x)dx\right\}\prod_x d\varphi. \tag{5.4}$$

泛函

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\} \tag{5.5}$$

是高斯型的，因而 (5.4) 式有意义，并按定义等于

$$\begin{aligned}I&=i\int\left[\int K(z-y)\varphi(y)dy\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right.\right.\\&\left.\left.+i\int\varphi(x)\eta(x)dx\right\}\right]\prod_x d\varphi=\int K(z-y)\frac{\delta}{\delta\eta(y)}Z(\eta)dy\\&=-i\eta(z)Z(\eta).\end{aligned} \tag{5.6}$$

另一方面

$$-i\eta(z)Z(\eta)=-\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\}$$

$$\times\frac{\delta}{\delta\varphi(z)}\exp\left\{i\int\varphi(x)\eta(x)dx\right\}\prod_x d\varphi. \tag{5.7}$$

比较（5.4）和（5.6）式可见，我们有通常的分部积分公式，而且边界项已消去。显然这一结果可以推广到任意的高斯型积分，因为任何这样的积分都可以表示为 I 对 η 的导数。

2. 重积分

既然高斯型泛函的积分也是一个高斯型泛函，就有可能定义重积分。让我们来证明[注]

$$\int\exp\left\{i\sum_{i,j=1}^{n}\frac{(K_n)_{i\ j}^{x\ y}}{2}\varphi_i^x\varphi_j^y+i\sum_{j=1}^{n}\eta_j^x\varphi_j^x\right\}\prod_x d\varphi_1\cdots d\varphi_n$$

$$=\exp\left\{-\frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(K_n^{-1})_{i\ j}^{x\ y}\eta_i^x\eta_j^y\right\}. \tag{5.8}$$

这里用了简化符号，记住要对连续指标 x,y 进行积分。

设（5.8）式对某一 n 成立。现在来证明它对 $n+1$ 也成立．按照假设

$$I_{n+1}=\int\exp\left\{-i\sum_{i,j=1}^{n}(\eta_i^x+K_{i\ n+1}^{x\ y}\varphi_{n+1}^y)\frac{(K_n^{-1})_{i\ j}^{x\ z}}{2}\right.$$

$$\times\left(\eta_j^z+K_{j\ n+1}^{z\ u}\varphi_{n+1}^u\right)+\frac{i}{2}K_{n+1\ n+1}^{x\ y}\varphi_{n+1}^x\varphi_{n+1}^y$$

$$\left.+i\eta_{n+1}^x\varphi_{n+1}^x\right\}\prod_x d\varphi_{n+1}, \tag{5.9}$$

对 φ_{n+1} 积分得到

[注] 原书下式中 $\Sigma\eta\varphi$ 前无 i. ——译者

$$
\begin{aligned}
I_{n+1} = \exp\Big\{ & -\frac{i}{2}\Big(\eta^x_{n+1} - \sum_{i,j=1}^{n} K^{xy}_{i\,n+1}\,(K_n^{-1})^{yz}_{ij}\eta^z_j\Big) \\
& \times\Big(K^{zu}_{n+1\,n+1} - \sum_{l,m=1}^{n} K^{zv}_{l\,n+1}(K_n^{-1})^{vs}_{lm}K^{su}_{m\,n+1}\Big)^{-1} \\
& \times\Big(\eta^u_{n+1} - \sum_{i,j=1}^{n} K^{ur}_{i\,n+1}(K_n^{-1})^{rt}_{ij}\eta^t_j\Big) \\
& -\frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\eta^x_i(K_n^{-1})^{xy}_{ij}\,\eta^y_j\Big\}
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

利用

$$
(K^{-1})^{xy}_{ij} = (\det K^{-1})^{xz}\overline{K}^{zy}_{ij},
\tag{5.11}
$$

其中 $\overline{K}_{ij}$ 是矩阵 K 的第 K_{ij} 元素的代数余子式，可将指数函数中幂次的第二个因子表示为

$$
\begin{aligned}
&(\det K_n)^{zx}\Big[(\det K_n)^{xy}K^{yu}_{n+1\,n+1} - \sum_{i,j=1}^{n} K^{xy}_{i\,n+1}\,\overline{K}^{yv}_{ij}\,K^{vu}_{j\,n+1}\Big]^{-1} \\
&\qquad = (\det K_n)^{zx}(\det K^{-1}_{n+1})^{xu}.
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

考查（5.10）式中的各项：

$$
\begin{aligned}
&\eta^x_{n+1}\eta^y_{n+1}(\det K_n)^{xz}(\det K^{-1}_{n+1})^{zy} = \eta^x_{n+1}(K^{-1}_{n+1})^{xy}_{n+1\,n+1}\eta^y_{n+1}, \\
&\sum_i \eta^x_{n+1}(\det K^{-1}_{n+1})^{xy}K^{yz}_{i\,n+1}\overline{K}^{zu}_{ij}\eta^u_j \\
&\quad = \eta^x_{n+1}(\det K^{-1}_{n+1})^{xy}\overline{K}^{yz}_{n+1\,j}\eta^z_j = \eta^x_{n+1}(K^{-1}_{n+1})^{xy}_{n+1\,j}\eta^y_j.
\end{aligned}
\tag{5.13}
$$

类似地可以证明，$\eta_i\,\eta_j$ 的系数是$(K^{-1}_{n+1})^{xy}_{ij}$。结果得到[注]：

$$
I_{n+1} = \exp\Big\{-\frac{i}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}(K^{-1}_{n+1})^{xy}_{ij}\eta^x_i\eta^y_j\Big\},
\tag{5.14}
$$

这正是所要证明的。显然，这一结果不依赖于积分次序，因为改变积分次序等效于将矩阵 K 的列重新加以安排。因此，我们证明了重积分存在，且其结果不依赖于积分顺序。

[注] 原书中下式Σ的上方无字. ——译者

3. δ 函数的定义

$$\int \exp\left\{i\int \eta(x)\left[\int c(x-y)\varphi(y)dy-\varphi'(x)\right]dx\right\}\prod_x d\eta$$

$$\underline{\underline{\text{按定义}}}\ \delta\left(\varphi(x)-\int c^{-1}(x-y)\varphi'(y)dy\right). \qquad (5.15)$$

这一等式意味着[注]

$$\int F(\varphi)\left[\int \exp\left\{i\int \eta(x)\left[\int c(x-y)\varphi(y)dy-\varphi'(x)\right]dx\right\}\right.$$
$$\left.\times\prod_x d\eta\right]\prod_x d\varphi\ \underline{\underline{\text{按定义}}}\int\left[\int F(\varphi)\exp\left\{i\int \eta(x)\left[\int c(x-y)\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.\times\varphi(y)dy-\varphi'(x)\right]dx\right\}\prod_x d\varphi\right]\prod_x d\eta=F(c^{-1}\varphi'), \quad (5.16)$$

其中 $F(\varphi)$ 是一个高斯型泛函。对比 通 常 δ 函 数 的 定 义， 在 (5.16) 式中还应该有另一个常 数（即 不 依 赖 于 φ' 的）因 子 $\det c^{-1}$. 不出现这一因子的原因是，在泛函积分 (5.16) 式的定义中包含有归一化条件.

(5.16) 式可通过直接验算来证明

$$\int\left[\int \exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\}\exp\left\{i\int\eta(x)\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\left[\int c(x-y)\varphi(y)dy-\varphi'(x)\right]dx\right\}\prod_x d\varphi\right]\prod_x d\eta$$
$$=\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi'(x)c^{-1}K(x-y)c^{-1}\varphi'(y)dxdy\right\}. \qquad (5.17)$$

现在来证明

$$\int\exp\left\{i\int\left[f_x(\varphi)-\varphi'(x)\right]\eta(x)dx\right\}\prod_x d\eta$$
$$=\delta\Big(f_x(\varphi)-\varphi'(x)\Big), \qquad (5.18)$$

其中，$f'_x(\varphi)$作为 x 的函 数 和 $\varphi(x)$ 属 于 同 一 函 数 类. 函 数

[注] 原书下式第三行中无dy. ——译者

$f_x(\varphi)$ 可以展开成如下形式的级数

$$f_x(\varphi)=c_0(x)+\varphi(x)+\tilde{f}(\varphi),$$

$$\tilde{f}(\varphi)=g\int c_1(x,y)\varphi(y)dy+g^2\int c_2(x,y,z)\varphi(y)\varphi(z)dydz+\cdots \tag{5.19}$$

（为了简单起见，假定 φ 一次方的系数等于 1．利用前面的公式很容易推广到 $c\neq 1$ 的情况）．方程

$$c_0(x)+\varphi(x)+\tilde{f}(\varphi)-\varphi'(x)=0 \tag{5.20}$$

有唯一的解，它可以展开成 g 的级数形式．

方程（5.18）意味着[注1]

$$\int\left[\int F(\varphi)\exp\left\{i\int\left[f_x(\varphi)-\varphi'(x)\right]\eta(x)dx\right\}\det\left\{1+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta\varphi}\right\}\times\prod_x d\varphi\right]\prod_x d\eta=F(\tilde{\varphi}). \tag{5.21}$$

其中，$\tilde{\varphi}(\varphi')$ 是方程（5.20）的解；$\det\left(1+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta\varphi}\right)$按定义是

$$\det\left\{1+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta\varphi}\right\}\underset{\text{按定义}}{=}\exp\left\{\mathrm{Tr}\ln\left[1+\frac{\delta\tilde{f}(x)}{\delta\varphi(y)}\right]\right\}$$

$$=\exp\left\{\int\frac{\delta\tilde{f}(x)}{\delta\varphi(y)}\bigg|_{x=y}dx+\frac{1}{2}\int dxdy\frac{\delta\tilde{f}(x)}{\delta\varphi(y)}\frac{\delta\tilde{f}(y)}{\delta\varphi(x)}+\cdots\right\}. \tag{5.22}$$

按定义[注2]

$$\int\left[\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy+i\int\left[f_x(\varphi)-\varphi'(x)\right]\eta(x)dx\right\}\det\left\{1+\frac{\delta\tilde{f}}{\delta\varphi}\right\}\prod_x d\varphi\right]\prod_x d\eta$$

[注1] 原书下式中方括号外无 $\prod_x$． ——译者

[注2] 原书下式第二行无]号，$f(\varphi)$ 无下标x． ——译者

$$=\int\Big[\overrightarrow{\exp}\left\{i\int\eta(x)\mathcal{F}\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)dx\right\}\det\left\{1+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi}\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)\right\}$$

$$\times\exp\left\{-\frac{i}{2}\int\eta(x)K^{-1}(x-y)\eta(y)dxdy\right\}\Big]$$

$$\times\exp\left\{-i\int\Big[\varphi'(x)-c_0(x)\Big]\eta(x)dx\right\}\prod_x d\eta. \tag{5.23}$$

指数函数上方的符号 →（←）表明，在指数函数的级数表示中，所有的$\frac{\delta}{\delta\eta}$必须放在$\eta$的右（左）边. 分部积分将右边化为

$$\int\exp\left\{-\frac{i}{2}\int\eta(x)K^{-1}(x-y)\eta(y)dxdy\right\}$$

$$\times\det\left\{1+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi}\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)\right\}\overleftarrow{\exp}\Big(i\int\mathcal{F}\Big(-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)$$

$$\times\eta(x)dx\Big\}\exp\left\{-i\int\Big[\varphi'(x)-c_0(x)\Big]\eta(x)dx\prod_x d\eta.\right.$$

(5.24)

考查泛函

$$B(\varphi',\eta)=\det\left\{1+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi}\Big(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)\right\}\overleftarrow{\exp}\Big\{i\int\mathcal{F}\Big(-\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\eta}\Big)$$

$$\times\eta(x)dx\Big\}\exp\left\{-i\int\Big[\varphi'(x)-c_0(x)\Big]\times\eta(x)dx\right\}$$

$$=\overleftarrow{\exp}\left\{-i\int\frac{\delta}{\delta\varphi'(x)}\mathcal{F}(\varphi'-c_0)dx\right\}$$

$$\times\det\left\{1+\frac{\delta\mathcal{F}}{\delta\varphi}(\varphi'-c_0)\right\}\exp\Big\{-i\int\Big[\varphi'(x)$$

$$-c_0(x)\Big]\eta(x)dx\Big\}. \tag{5.25}$$

$B(\varphi',\eta)$满足方程

$$\frac{\delta B}{\delta \eta(x)} = i\left[c_0(x) - \varphi'(x) + \mathfrak{f}\left(i\frac{\delta}{\delta \eta}\right)\right]B \tag{5.26}$$

和初始条件

$$B(\varphi', 0) = A(\varphi') = \exp\left\{-\int \frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \mathfrak{f}(\varphi' - c_0) dx\right\}$$

$$\times \det\left\{1 + \frac{\delta \mathfrak{f}}{\delta \varphi}(\varphi' - c_0)\right\} \cdot 1. \tag{5.27}$$

我们来求方程（5.26）的如下形式的解

$$B(\varphi', \eta) = A(\varphi') \exp\left\{-i\int \varphi(\varphi')\eta(x) dx\right\}. \tag{5.28}$$

将（5.28）式代入（5.26）式得到

$$\varphi(x) = \varphi'(x) - c_0(x) - \mathfrak{f}(\varphi). \tag{5.29}$$

因此，所讨论的积分等于

$$A(\varphi')\int \exp\left\{-\frac{i}{2}\int \eta(x) K^{-1}(x-y)\eta(y) dxdy\right\} \exp\left\{-i \times \int \widetilde{\varphi}(x)\eta(x) dx\right\} \prod_x d\eta$$

$$= A(\varphi') \exp\left\{\frac{i}{2}\int \widetilde{\varphi}(x) K(x-y) \widetilde{\varphi}(y) dxdy\right\}. \tag{5.30}$$

剩下只需证明 $A(\varphi') = 1$。（5.27）式可改写为

$$A(\varphi') = \det\left[\overleftarrow{\exp}\left\{-\frac{\delta}{\delta \varphi'(x)} \mathfrak{f}(\varphi' - c_0)\right\}\right.$$

$$\left.\times \left\{1 + \frac{\delta \mathfrak{f}}{\delta \varphi}(\varphi' - c_0)\right\}\right] \cdot 1 = \det\left[\sum_n \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\delta^n}{\delta \varphi'^n(x)}\right.$$

$$\left.\times \mathfrak{f}^n(\varphi' - c_0)\left\{1 + \frac{\delta \mathfrak{f}}{\delta \varphi'}(\varphi' - c_0)\right\}\right] \cdot 1. \tag{5.31}$$

我们来考查方括号中的和式的第 n 项。它是一个二项式，其第一项可写为

$$\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\delta^n}{\delta\varphi'^n}\mathfrak{f}^n(\varphi')=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}$$

$$\times\frac{\delta^{n-1}}{\delta\varphi'^{n-1}}\left(\frac{\delta\mathfrak{f}}{\delta\varphi'}\mathfrak{f}^{n-1}(\varphi')\right). \qquad (5.32)$$

另一方面，方括号中和式的第 $n-1$ 项也是类似的二项式，其第二项等于

$$\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{\delta^{n-1}}{\delta\varphi'^{n-1}}\left(\frac{\delta\mathfrak{f}}{\delta\varphi'}\mathfrak{f}^{n-1}(\varphi')\right). \qquad (5.33)$$

这样，方括号中相继的项相消，整个表达式等于 1。

4．变量替换

令

$$I=\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right.$$

$$\left.+\ i\int\varphi(x)\eta(x)dx\right\}\prod_x d\varphi. \qquad (5.34)$$

通过变量代换

$$\varphi=f_x(\varphi'),\ f_x(\varphi')=c_0(x)+\varphi'(x)+\mathfrak{f}(\varphi') \qquad (5.35)$$

将 I 化为

$$I=\int\exp\left\{\frac{i}{2}\int f_x(\varphi')K(x-y)f_y(\varphi')dxdy\right.$$

$$\left.+\ i\int f_x(\varphi')\eta(x)dx\right\}\det\left\{1+\frac{\delta\mathfrak{f}}{\delta\varphi'}\right\}\prod d\varphi'. \qquad (5.36)$$

为了证明这一论断，只要证实（5.34）和（5.36）式的富里叶变换相等。（5.34）式的富里叶变换是

$$\exp\left\{\frac{i}{2}\int\varphi(x)K(x-y)\varphi(y)dxdy\right\}. \qquad (5.37)$$

(5.36) 的富里叶变换等于[注]

$$\tilde{I}(\psi)=\int I(\eta)\exp\left\{-i\int\eta(x)\psi(x)dx\right\}\prod_x d\eta$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{2}\int f_x K(x-y)f_y dxdy\right\}\det\left\{1+\frac{\delta f}{\delta\psi'}\right\}$$

$$\times\delta(\psi-f_x(\psi'))\Big)\prod_x d\psi'$$

$$=\exp\left\{\frac{i}{2}\int\psi(x)K(x-y)\psi(y)dxdy\right\}. \qquad (5.38)$$

上述论断得证。

以上讨论表明，实际上在微扰论中用到的费曼积分的所有性质都是直接由准高斯型积分的定义得来，并且能够不依赖于费曼积分测度的存在性问题而严格地加以证明。这样，在微扰论范围内，路径积分的表述是一种完全严格的数学方法，由它所得到的结果不需要进一步验证。

所有这些结论全都能用于包含费米变量的路径积分中。在此情况下，必须记住变分导数的反对易性，而在变量代换的公式里面，相应的行列式应写在分母中而不是分子中。费米变量的高斯型积分的这一特征性质前面已经讨论过。

[注] 原书中下式$f(\varphi')$无下标x。 ——译者

第三章 杨-米尔斯场的量子化

§3.1 杨-米尔斯场的拉格朗日及其量子化的特殊性质

在上一章中，我们以标量场和旋量场作例子，用路径积分表述了这些场的量子化规则。初看起来，似乎可以用类似方式将杨-米尔斯场的每一个分量看成一个标量场来进行量子化.然而情况并非如此,规范不变性给量子化带来了一些特异性质。和杨-米尔斯场相互作用的旋量场和标量场对这些特异性质毫无影响。因此,在下面的前三节中，我们将限于讨论真空中的杨-米尔斯场。

回忆一下第一章中引进过的符号。设Ω为内部对称性的紧致群，T^a $(a=1,\cdots,n)$是它在伴随表示中的正交归一生成元，t^{abc}是相应的结构常数，而

$$\mathscr{A}_\mu = A_\mu^a T^a \tag{1.1}$$

是杨-米尔斯场。规范变换由在群的伴随表示中取值的矩阵$\omega(x)$给出

$$\mathscr{A}_\mu(x) \to \mathscr{A}_\mu^\omega(x) = \omega(x)\mathscr{A}_\mu\omega^{-1}(x) + \partial_\mu\omega(x)\omega^{-1}(x). \tag{1.2}$$

规范不变的拉格朗日函数有如下形式

$$\mathscr{L} = \frac{1}{8g^2}\mathrm{tr}\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\}, \tag{1.3}$$

其中

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\nu\mathscr{A}_\mu - \partial_\mu\mathscr{A}_\nu + [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]. \tag{1.4}$$

运动方程

$$\nabla_\mu\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu\mathscr{F}_{\mu\nu} - [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{F}_{\mu\nu}] = 0 \tag{1.5}$$

对$\mathscr{A}_\mu$是二阶方程，并且是规范不变的：如果$\mathscr{A}_\mu(x)$是运动方程的一个解，则对于依赖于x的任何$\omega(x)$，$\mathscr{A}_\mu^\omega(x)$也是一个

解．这意味着（1.5）式中的各个运动方程是不独立的．而且不难验证

$$\nabla_\nu \nabla_\mu F_{\mu\nu} = 0. \tag{1.6}$$

为了证明这一点，将 $\nabla_\nu \nabla_\mu$ 写为

$$\nabla_\nu \nabla_\mu = \frac{1}{2}(\nabla_\nu \nabla_\mu + \nabla_\mu \nabla_\nu) + \frac{1}{2}(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu). \tag{1.7}$$

回忆一下，对伴随表示中的任意矩阵 $\mathscr{B}(x)$，有

$$(\nabla_\nu \nabla_\mu - \nabla_\mu \nabla_\nu)\mathscr{B}(x) = [\mathscr{F}_{\mu\nu}, \mathscr{B}]. \tag{1.8}$$

因为 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 对 μ 和 ν 反对称，我们得到

$$\nabla_\nu \nabla_\mu \mathscr{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\mathscr{F}_{\mu\nu}, \mathscr{F}_{\mu\nu}] = 0. \tag{1.9}$$

(1.9)式是奈特（Noether）第二定理的一个特殊情况；这一定理断言，拉格朗日函数对依赖于任意函数的某一变换的不变性导致运动方程之间线性相关．

运动方程的上述特殊性质在将它们量子化时体现出来．的确，在使经典解参数化的函数中，有一些是任意地依赖于时间，不满足上述要求，因此，在进行量子化的时候，必须把真实的动力学变量和群的参量加以区分．我们将在下节中讨论这一问题．

现在来说明，为什么不能将上一章中所讲的建立微扰论的规则简单地过渡到杨-米尔斯场的情况．

按照第二章的规定，为了对一个给定的拉格朗日函数 $\mathscr{L}$ 建立微扰论，必须将它表示为如下形式

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_0 + \mathscr{L}_{int}, \tag{1.10}$$

其中 $\mathscr{L}_0$ 是场的一个二次型，而 $\mathscr{L}_{int}$ 包含场的高次型．$\mathscr{L}_{int}$ 中的各项规定了有三条或更多条腿的顶点，而 $\mathscr{L}_0$ 决定了对应于内线的传播子．那就是说，传播子是一个积分算符的核，这个积分算符是决定二次型 $\mathscr{L}_0$ 的微分算符之逆．

准确到一个非本质的散度，杨-米尔斯场的拉格朗日函数$\mathscr{L}_0$有以下形式（采用$\mathscr{A}_\mu \to g\mathscr{A}_\mu$的归一化）：

$$\mathscr{L}_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a)(\partial_\nu A_\mu^a - \partial_\mu A_\nu^a)$$

$$= -\frac{1}{2}[\partial_\mu A_\nu^a \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\mu A_\mu^a \partial_\nu A_\nu^a]. \tag{1.11}$$

在动量表象中，二次型$\mathscr{L}_0$由下式给出

$$K_{\mu\nu}^{ab}(k) = \delta^{ab}(g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu). \tag{1.12}$$

这一算符没有逆算符，因而传播子不能确定。其原因是，正如已经指出的那样，并非杨-米尔斯场的所有分量都是独立的动力学变量。

众所周知，在量子电动力学中也遇到过类似的困难。在此情况下，采用古普塔-布略勒（Gupta-Bleuler）的方案，即选择

$$D_{\mu\nu}(k^2) = -\frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i0} \tag{1.13}$$

作为光子的传播子，用它做出的S矩阵被证明为么正的。

推广这一方法，我们可以尝试利用传播子

$$D_{\mu\nu}^{ab} = -\frac{\delta^{ab}g_{\mu\nu}}{k^2 + i0} \tag{1.14}$$

来建立杨-米尔斯理论。然而，正如费曼最先指出的，这样建立的微扰论是不能允许的。用这样的传播子算出的S矩阵不么正。因此，需要从杨-米尔斯场经典动力学的因果描述出发来修正微扰论规则的推导。为此，最方便的是选用哈密顿理论体系。

§3.2 杨-米尔斯场的哈密顿理论体系和它的量子化

为了建立起自洽的量子步骤，必须首先找到杨-米尔斯场的真实动力学变量，并且验证它们是按照哈密顿动力学的规律随时间变化的。然后，才可用上一章中发展的路径积分方法得到演化算符。

让我们来仔细考察杨-米尔斯场拉格朗日函数的结构．比较方便的是用一阶形式的拉格朗日函数：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{4}\operatorname{tr}\left\{(\partial_{\nu}\mathscr{A}_{\mu}-\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\nu}+g[\mathscr{A}_{\mu},\mathscr{A}_{\nu}]-\frac{1}{2}\mathscr{F}_{\mu\nu})\mathscr{F}_{\mu\nu}\right\},\tag{2.1}$$

其中 $\mathscr{A}_{\mu}$ 和 $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ 被看成是独立变量．显然，这一拉格朗日函数和由它推出的运动方程同拉格朗日函数（1.3）式等效。

在三维符号下（$\mu=0,k$; $\nu=0,l$; $k,l=1,2,3$），可以将拉格朗日函数改写（准确到一个附加散度）为：

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\mathscr{E}_{k}\partial_{0}\mathscr{A}_{k}-\frac{1}{2}(\mathscr{E}_{k}^{2}+\mathscr{G}_{k}^{2})+\mathscr{A}_{0}\mathscr{C}\right\},\tag{2.2}$$

其中

$$\mathscr{E}_{k}=\mathscr{F}_{k0};\quad \mathscr{G}_{k}=\frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}\mathscr{F}_{ji};\quad \mathscr{C}=\partial_{k}\mathscr{E}_{k}-g[\mathscr{A}_{k},\mathscr{E}_{k}],\tag{2.3}$$

而且假定 $\mathscr{F}_{ik}$ 通过不包含时间导数的运动方程，由 $\mathscr{A}_{i}$ 表示

$$\mathscr{F}_{ik}=\partial_{k}\mathscr{A}_{i}-\partial_{i}\mathscr{A}_{k}+g[\mathscr{A}_{i},\mathscr{A}_{k}].\tag{2.4}$$

同一个拉格朗日函数也可以写成

$$\mathscr{L}=E_{k}^{a}\partial_{0}A_{k}^{a}-h(E_{k},A_{k})+A_{0}^{a}C^{a},\quad h=\frac{1}{2}\{(E_{k}^{a})^{2}+(G_{k}^{a})^{2}\}.\tag{2.5}$$

由（2.5）式显然可见，(E_{k}^{a},A_{k}^{a}) 是正则变量对；h 是哈密顿量，A_{0}^{a} 是拉格朗日乘子，而 C^{a} 是加在正则变量上的约束．通过引入泊松括号[注]

$$\{E_{k}^{a}(x),A_{l}^{b}(y)\}=\delta_{kl}\delta^{ab}\delta(\vec{x}-\vec{y}),\tag{2.6}$$

容易验证

$$\{C^{a}(x),C^{b}(y)\}=gt^{abc}C^{c}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}),\tag{2.7}$$

而且

$$\left\{\int d^{3}x[(E_{k}^{a})^{2}+(G_{k}^{a})^{2}],\ C^{b}(y)\right\}=0,\tag{2.8}$$

[注] 原书以下二式中的 δ 函数为 $\delta(x-y)$． ——译者

这表明，我们的系统是所谓广义哈密顿系统的一个例子．广义哈密顿动力学的概念是狄拉克引入的．让我们用一个n自由度系统作例子来考察它．设p_i和q_i为正则变量，它们形成相空间Γ^{2n}，并设作用量有如下形式

$$A=\int\left[\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-h(p,q)-\sum_{a}\lambda^a\varphi^a(p,q)\right]dt$$

$$(a=1,\cdots,m;m<n),\qquad(2.9)$$

这里除p和q以外附加了变量λ^a，它称为拉格朗日乘子，而φ^a是约束．如果条件

$$\{h,\varphi^a\}=c^{\alpha\beta}(p,q)\varphi^\beta;\ \{\varphi^\alpha,\varphi^\beta\}=\sum_{\gamma}c^{\alpha\beta\gamma}(p,q)\varphi^\gamma\qquad(2.10)$$

（一般说来系数$c^{\alpha\beta}$和$c^{\alpha\beta\gamma}$依赖于p,q）能够满足的话，则(2.9)式决定一个广义的哈密顿系统，这个广义的哈密顿系统等效于有$n-m$个自由度的常规的哈密顿系统Γ^*．后一系统的相空间$\Gamma^{*2(n-m)}$可如下实现．我们考虑m个辅助条件[注]

$$\chi^a(p,q)=0,\qquad(2.11)$$

对于它们，满足下述要求

$$\det|\{\varphi^\alpha,\chi^\beta\}|\neq0,\qquad(2.12)$$

$$\{\chi^\alpha,\chi^\beta\}=0,\qquad(2.13)$$

则在Γ^{2n}中满足条件

$$\chi^a(p,q)=0,\ \varphi^a(p,q)=0\qquad(2.14)$$

的子空间就是所要求的空间$\Gamma^{*2(n-m)}$．

$\Gamma^{*2(n-m)}$中的正则变量p^*，q^*可按如下方法找到．根据(2.13)式，可以在Γ^{2n}中选择正则变量，使得前m个坐标型变量就是χ^a：

$$q=(\chi^a,q^*),\qquad(2.15)$$

［注］原书下式中的上标为$\boldsymbol{m}$．——译者

相应的共轭动量为

$$p=(p^{\alpha},p^{*})。\tag{2.16}$$

利用这些变量，(2.12) 式有以下形式：

$$\det\left|\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial p^{\beta}}\right|\neq 0。\tag{2.17}$$

因而，约束方程

$$\varphi^{\alpha}(p,q)=0\tag{2.18}$$

可以对 p^{α} 解出．其结果，子空间 $p^{*2(n-m)}$由方程

$$\chi^{\alpha}\equiv q^{\alpha}=0;\quad p^{\alpha}=p^{\alpha}(p^{*},q^{*})\tag{2.19}$$

给出，而 p^{*}，q^{*} 是正则变量．这一系统的哈密顿量是

$$h^{*}(p^{*},q^{*})=h(p,g)\,|_{\varphi=0,\chi=0}\ 。\tag{2.20}$$

系统 Γ 和 Γ^{*} 等效的意义如下：考虑系统 Γ 的运动方程

$$\dot{p}_i+\frac{\partial h}{\partial q_i}+\lambda^{\alpha}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial q_i}=0,\quad \dot{q}_i-\frac{\partial h}{\partial p_i}-\lambda^{\alpha}\frac{\partial\varphi^{\alpha}}{\partial p_i}=0,\varphi^{\alpha}=0。\tag{2.21}$$

这一方程的解包含任意函数 $\lambda^{\alpha}(t)$。补 充 条 件 $\chi^{\alpha}(p,q)=0$ 通 过将 $\lambda^{\alpha}(t)$用正则变量表示而消除了这一任意性。其结果，变量 p^{*}，q^{*} 的方程是唯一遗留下来的方程．这些方程和系统的哈密顿方程相吻合：

$$\dot{q}^{*}=\frac{\partial h^{*}}{\partial p^{*}};\ \dot{p}^{*}=-\frac{\partial h^{*}}{\partial q^{*}}。\tag{2.22}$$

考察用坐标 (2.15)、(2.16) 表示的方程 (2.19)、(2.21) 式．由方程 $\dot{q}^{\alpha}=0$ 得到关系式

$$\frac{\partial h}{\partial p_{\alpha}}+\lambda^{\beta}\frac{\partial\varphi_{\beta}}{\partial p_{\alpha}}=0,\tag{2.23}$$

它使我们能求得λ^a。现在考查某一个坐标q^*，并将由（2.19）和（2.21）式得到的这一坐标的方程和（2.22）式对比，它们分别有下述形式：

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \lambda^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial p^*}, \tag{2.24}$$

$$\dot{q}^* = \frac{\partial h^*}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p^*} + \frac{\partial h}{\partial p_a} \frac{\partial p_a}{\partial p^*}. \tag{2.25}$$

如果

$$\lambda^a \frac{\partial \varphi_a}{\partial p^*} = \frac{\partial h}{\partial p_a} \frac{\partial p^a}{\partial p^*}, \tag{2.26}$$

则（2.24）和（2.25）式的右边相等。利用方程（2.23）可将这一条件改为

$$\lambda^a \left(\frac{\partial \varphi_a}{\partial p^*} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial p_\beta} \frac{\partial p_\beta}{\partial p^*} \right) = 0. \tag{2.27}$$

由于约束条件$\varphi_a = 0$，上式成立。对变量p^*可以类似地处理。这样，我们的论断得到了证实。

约束条件选择的改变与$\Gamma^{*2(n-m)}$空间中的一个正则变换等效，因而不影响问题的物理内容。为了将系统Γ量子化，可以利用独立变量p^*，q^*。这样，演化算符由路径积分

$$\int \exp\left\{ i \int [p^* \dot{q}^* - h(p^*, q^*)] dt \right\} \prod_t \frac{dp^* dq^*}{(2\pi)} \tag{2.28}$$

给出，其中坐标q^*的初始值和终了值固定。

我们希望直接和广义哈密顿系统Γ本身打交道。容易验证，路径积分

$$\int \exp\left\{ i \int [p_i \dot{q}_i - h(p,q) - \lambda^a \varphi^a(p,q)] dt \right\}$$

$$\times \prod_{t,a} \delta(\chi^a) \prod_t \det \left| \left\{ \varphi_a, \chi_\beta \right\} \right| \prod_t \frac{dpdq}{2\pi} \frac{d\lambda}{2\pi} \tag{2.29}$$

和（2.28）式相吻合．的确，通过对 λ 积分可改写（2.29）式为

$$\int \exp\left\{ i\int [p_i\dot{q}_i - h(p,q)]dt \right\}$$

$$\times \prod_{t,a}\delta(\chi^a)\delta(\varphi^a)\prod_t \det\left|\left\{\varphi_a, \chi_\beta\right\}\right| \prod_t \frac{dpdq}{2\pi}. \qquad (2.30)$$

应用变量 p^a，q^a，p^*，q^* 可以改写因子

$$\prod_t \delta(\varphi_a)\delta(\chi_a)\det\left|\left\{\varphi_a, \chi_\beta\right\}\right| \qquad (2,31)$$

为

$$\prod_t \delta(\varphi_a)\delta(q_a)\det\left|\frac{\partial\varphi_a}{\partial p_\beta}\right| = \prod_t \delta(q_a)\delta[p_a - p_a(p^*, q^*)]. \quad (2.32)$$

其结果，通过对 p_a 和 q_a 积分使得（2.29）式化为（2.28）式．

将（2.5）～(2.8）式与（2.9)，(2.10）式相比较可以看出，杨-米尔斯场的确是一个广义哈密顿系统．现在应用刚描述过的步骤来将它量子化．

显然，在此情况下，规范条件应起补充条件的作用．我们将选择式

$$\partial_k \mathscr{A}_k = 0 \qquad (2.33)$$

作为这样的条件．这一条件是相容的．实际上，显然有

$$\{\partial_k A_k^a(x),\ \partial_i A_i^b(y)\} = 0, \qquad (2.34)$$

进而有[注1]

$$\{C^a(x), \partial_k A_k^b(y)\} = \partial_k[\partial_k\delta^{ab} - gt^{abc}A_k^c(x)]\delta(\vec{x}-\vec{y}). \qquad (2.35)$$

算符 $M_C = \Delta\delta^{ab} - gt^{abc}A_k^c(x)\partial_k$ 在微扰论范围内是可逆的[注2]．逆算符 M_C^{-1} 是一个积分算符，其核 $M_C^{-1}(x,y)$ 由积分方程

〔注1〕原书（2.35）中的 δ 函数为 $\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$，(2.36）分母中为 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}|$，积分中为 $d\boldsymbol{z}$．　——译者

〔注2〕表示库仑规范的下标，在原书中有时用大写 $\boldsymbol{C}$，有时用小写 c，现统一用大写．　——译者

$$M_C^{-1ab}(x,y)=\frac{1}{4\pi}\frac{\delta^{ab}}{|\vec{x}-\vec{y}|}+g\int\frac{d\vec{z}}{4\pi}t^{acd}\frac{A_k^c(z)}{|\vec{x}-\vec{z}|}\partial_k M_C^{-1db}(z,y) \tag{2.36}$$

决定，并可用叠代法算出为 g 的形式级数（注意，对于大的场 A_k，算符 M_C 可以有非零本征值，从而 M_C^{-1} 可能不再存在。然而，这一问题超出了微扰论的范围，我们这里不讨论它）。

补充条件（2.33）式启发我们，为了找到坐标 q^*，方便的办法是将 $\mathscr{A}_k$ 正交展开为纵横分量：

$$\mathscr{A}_k=\mathscr{A}_k^L+\mathscr{A}_k^T, \tag{2.37}$$

这里[注1]

$$\mathscr{A}_K^L=\partial_k\mathscr{B}(x),\ \mathscr{B}(x)=\frac{1}{4\pi}\int\frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\partial_k\mathscr{A}_k(y)d\vec{y}, \tag{2.38}$$

而

$$\partial_k\mathscr{A}_k^T=0. \tag{2.39}$$

显然，横向分量 $\mathscr{A}_k^T$ 起 q^* 的作用，和它们共轭的动量是横向分量 $\mathscr{E}_k^T(x)$。约束方程是纵向分量 $\mathscr{E}_k^L(x)$ 的方程。如果令

$$\mathscr{E}_k^L(x)=\partial_k Q(x), \tag{2.40}$$

则约束方程可写为

$$\Delta Q-g[\mathscr{A}_k,\partial_k Q]-g[\mathscr{A}_k,\mathscr{E}_k^T]=0\ , \tag{2.41}$$

其中包含我们已经熟悉的算符 M_C.这一方程使我们能够将纵向分量 $\mathscr{E}_k^L$ 用 $\mathscr{E}_k^T$和$\mathscr{A}_k^T$表示.将解代入哈密顿量 $h(\mathscr{A},\mathscr{E})$以后,得到展开成常数 g 的无穷级数形式的哈密顿量 $h^*(\mathscr{A}^T,\mathscr{E}^T)$。具有哈密顿量 h^* 的变量 $\mathscr{A}^T,\mathscr{E}^T$ 是杨-米尔斯场的真实哈密顿变量.固定时刻 t 的场位形 $\mathscr{A}^T$ 由 $\vec{x}$[注2]的两个函数给出，这意味着，

[注1] 原书下式分母中为 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$，积分中为 $d\boldsymbol{y}$. ——译者

[注2] 原书中为 $\boldsymbol{x}$. ——译者

杨-米尔斯场有两种可能的极化状态。

现在可以写出杨-米尔斯场在路径积分形式下的 S 矩阵

$$S=\lim_{\substack{t''\to\infty\\ t'\to-\infty}}\int\exp\left\{\int d^3k\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\left[a_i^{*b}(\vec{k},t'')a_i^b(\vec{k},t'')\right.\right.$$

$$\left.+a_i^{*b}(\vec{k},t')a_i^b(\vec{k},t')\right]+i\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\left[\left(-\frac{1}{4}\right)\right.$$

$$\times\mathrm{tr}[\mathscr{E}_l^T(\vec{x},t)\dot{\mathscr{A}}_l^T(\vec{x},t)-\dot{\mathscr{E}}_l^T(\vec{x},t)\mathscr{A}_l^T(\vec{x},t)]$$

$$\left.\left.-h^*(\mathscr{E}^T\mathscr{A}^T)\right]\right\}\prod\frac{da_i^*(\vec{k},t)da_i(\vec{k},t)}{2\pi i},\qquad(2.42)$$

其中

$$A_l^{T,b}(\vec{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1,2}\int\left[-e^{i\vec{k}\vec{x}}a_i^b(\vec{k},t)u_l^i(\vec{k})+e^{-i\vec{k}\vec{x}}a_i^{*b}(\vec{k},t)\right.$$

$$\left.\times u_l^i(-\vec{k})\right]\frac{d^3k}{\sqrt{\omega}},$$

$$E_l^{T,b}(\vec{x},t)=\frac{i}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1,2}\int\left[-e^{i\vec{k}\vec{x}}a_i^b(\vec{k},t)u_l^i(\vec{k})+e^{-i\vec{k}\vec{x}}a_i^{*b}(\vec{k},t)\right.$$

$$\left.\times u_l^i(-\vec{k})\right]\frac{\sqrt{\omega}\,d^3k}{\sqrt{2}}\qquad(2.43)$$

而 u_l^i，$i=1,2$ 是两个极化矢量，它们可以用垂直于矢量 $\vec{k}$ 的任意两个正交归一矢量来表示。这里，假定了渐近条件

$$a_i^{*b}(\vec{k},t'')\xrightarrow[t''\to\infty]{}e^{i\omega t''}a_i^{*b}(\vec{k});\quad a_i^b(\vec{k},t')\xrightarrow[t'\to-\infty]{}e^{-i\omega t'}a_i^b(\vec{k}).\qquad(2.44)$$

上述公式对于建立图形规则很不方便，因为哈密顿量 h^* 只在常数 g 的级数形式下给出；而且它还会产生对空间坐标不是定域的顶点。自然，这只不过是一个技术上的困难，但是它严重地阻碍了实际计算，特别是阻碍了建立重整化步骤。如果我们利用对所有函数 $\mathscr{A}_l(\vec{k},t)$，$\mathscr{E}_l(\vec{k},t)$ 积分的 S 矩阵的表达式，则这一缺点会消失：

$$S=\lim_{\substack{t''\to\infty\\ t'\to-\infty}}\int\exp\Big\{\int d^3k\frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\Big[a_i^{*b}(\vec{k},t'')a_i^b(\vec{k},t'')+a_i^{*b}(\vec{k},t')$$

$$\times a_i^b(\vec{k},t')\Big]+i\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\Big(-\frac{1}{4}\Big)\mathrm{tr}\Big[\mathscr{E}_l(\vec{x},t)\dot{\mathscr{A}}_l(\vec{x},t)$$

$$-\dot{\mathscr{E}}_l(\vec{x},t)\mathscr{A}_l(\vec{x},t)-\mathscr{E}_l^2(\vec{x},t)-\mathscr{G}_l^2(\vec{x},t)+2\mathscr{A}_0(\partial_l\mathscr{E}_l$$

$$-g[\mathscr{A}_l,\mathscr{E}_l])\Big]\Big\}\times\prod_{x,t}\delta(\partial_l\mathscr{A}_l)\det M_C[\mathscr{A}]\prod_{x,t}d\mathscr{A}_ld\mathscr{E}_ld\mathscr{A}_0.$$

(2.45)

这里的边界项 $a_i^*(\vec{k},t'')$，$a_i(\vec{k},t')$ 由与以前相同的公式决定，也就是说，决定于横向场 $\mathscr{A}_l^T$。

现在，我们就能够在考虑到边界条件的情况下对动量 $\mathscr{E}_k$ 积分，正象在第二章中对标量场做过的那样。其结果，得到 S 矩阵正规符号的下述表达式

$$S=N^{-1}\int\exp\Big\{i\int dx\Big[\frac{1}{8}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\Big]\Big\}\prod_x\delta(\partial_k\mathscr{A}_k)\prod_t\det M_C[\mathscr{A}]$$

$$\times\prod_x d\mathscr{A}_\mu, \tag{2.46}$$

其中的积分对场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 进行，其三维部分的渐近行为按如下方式固定：

$$\mathscr{A}_l^T(x)_{t\to\pm\infty}\longrightarrow\mathscr{A}_{l\,\substack{入\\出}}^T(x);$$

$$A_{l\,\substack{入\\出}}^{T,b}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\sum_{i=1,2}\int[a_{i\,\substack{入\\出}}^b(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}u_l^i(\vec{k})+a_{i\,\substack{入\\出}}^{*b}(\vec{k})$$

$$\times e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}u_l^i(\vec{k})]\frac{d^3k}{\sqrt{2k_0}},$$

$$a_{i入}^b(\vec{k})=a_i^b(\vec{k}),\quad a_{i出}^{*b}(\vec{k})=a_i^{*b}(\vec{k}),\quad i=1,2, \tag{2.47}$$

并且相应地确立了作用量二次型的定义.

和标量场情况一样，在(2.46)式中，有对费曼泛函 exp($i\times$作用量）的积分. 然而，积分并不是对所有的场进行. 积分测度明显地包含规范条件的 δ 函数. 这是相对性原理的一种表现，按照这一原理，不需要对所有的场积分，而只要对规范等效场的类进行积分：δ 函数从每一类中选出一个代表，而行列式保证了积分测度的正确归一化. 渐近条件也和规范条件的选择相一致.

将（2.46）式展开成微扰论级数就产生了图形规则. 传播子由高斯型积分

$$I(J)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int dx\,\mathrm{tr}\left[\frac{1}{8}(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)^2-\frac{1}{2}\mathscr{T}_\mu\mathscr{A}_\mu\right]\right\}$$

$$\times\prod_x\delta(\partial_k\mathscr{A}_k)d\mathscr{A}_\mu \tag{2.48}$$

决定，其中的 $\mathscr{A}_k^T$ 满足费曼边界条件. 这一积分等于

$$\exp\left\{\frac{i}{2}\int J_\mu^a(x)D_{\mu\nu}^C(x-y)J_\nu^a(y)dxdy\right\}, \tag{2.49}$$

其中 $D_{\mu\nu}^C$ 是所求的传播子[注1]

$$\left.\begin{aligned}
D_{ml}^C(x)&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\left(\delta^{ml}-\frac{k_mk_l}{|\vec{k}|^2}\right)(k^2+i0)^{-1}dk;\\
D_{m0}^C(x)&=D_{0m}^C(x)=0;\\
D_{00}^C(x)&=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\frac{1}{|\vec{k}|^2}dk.
\end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

为了证明这一论断，我们利用 δ 函数的积分表示[第二章（5.18）式]. 这样，$I(J)$ 由下述高斯型积分给出[注2]：

[注1] D的上标在原书中为小写c，现改为大写（参看p.74译注2）. ——译者

[注2] 在（2.51）～(2.55）式中，A 与 J 的上标原书中用 l，为了区分内禀空间和三维几何空间的指标，现改为 a. ——译者

$$I(J)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int dx\left[-\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu^a-\partial_\mu A_\nu^a)^2+J_\mu^a A_\mu^a+\lambda^a\partial_k A_k^a\right]\right\}$$
$$\times\prod_x d\mathscr{A}_\mu d\lambda. \qquad (2.51)$$

为了计算它，需要找到指数的极值．方程

$$\left.\begin{aligned}&\partial_\nu(\partial_\nu A_k^a-\partial_k A_\nu^a)+J_k^a+\partial_k\lambda^a=0;\\&\partial_\nu(\partial_\nu A_0^a-\partial_0 A_\nu^a)+J_0^a=0;\\&\partial_k A_k^a=0\end{aligned}\right\} \qquad (2.52)$$

可以改写为

$$\left.\begin{aligned}&\Box A_k^a+(\partial_k\lambda^a+\partial_0\partial_k A_0^a)+J_k^a=0;\\&\Delta A_0^a-J_0^a=0;\\&\partial_k A_k^a=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.53)$$

它在上述边界条件下有唯一的解．也可以假定源 J 满足横向条件

$$\partial_k J_k^a=0. \qquad (2.54)$$

其结果，解由下式给出

$$A_\mu^a(x)=\int D_{\mu\nu}^C(x-y)J_\nu^a(y)dy, \qquad (2.55)$$

其中 $D_{\mu\nu}^C(x)$ 是前面写出过的库仑传播子．

$D_{\mu\nu}^C$ 的式子表明，只有 $\mathscr{A}_\mu$ 的三维横向分量在时间中传播，这和我们的边界条件一致．

库仑规范中图形规则的缺点在于缺乏明显的相对论不变性．在下节中将证明，决定 S 矩阵的（2.46）式可以过渡到明显协变的规范．

在结束这一节的时候，我们给出杨-米尔斯场的另一种哈密顿体系，它用了规范条件 $A_0=0$，称为哈密顿规范．这是对库仑规范的改进，表现在，它超出微扰论范围之外也是容许的．

现在来证明，在每一个规范等效场的类中都存在一个场满足条件

$$\mathscr{A}_0=0. \qquad (2.56)$$

为此，我们指出，方程

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\vec{x},t)=-\omega(\vec{x},t)\mathscr{A}_0(\vec{x},t) \tag{2.57}$$

可以有如下形式的解

$$\omega_0(\vec{x},t)=T\exp\left\{-\int_{-\infty}^{t}\mathscr{A}_0(\vec{x},s)ds\right\}, \tag{2.58}$$

其中符号T表示指数在时间先后上是按顺序排列的。从方程(2.57)可见

$$\mathscr{A}_\mu^{\omega_0}=\omega_0\mathscr{A}_\mu\omega_0^{-1}+\partial_\mu\omega_0\omega_0^{-1} \tag{2.59}$$

满足条件

$$\mathscr{A}_0^{\omega_0}=0. \tag{2.60}$$

除了$\omega_0(x)$之外，如下形式的矩阵

$$\omega(x)=\omega(\vec{x})\omega_0(x) \tag{2.61}$$

也有类似的性质，其中$\omega(\vec{x})$是Ω中的任一矩阵，它只依赖于空间坐标。因此，哈密顿规范没有完全消除杨-米尔斯场的规范不确定性，而只是将规范群约化为矩阵$\omega(\vec{x})$的群。

现在来证明，在规范$\mathscr{A}_0=0$中的运动方程确实是哈密顿方程。为此，采用由(2.1)式得到的一阶形式的运动方程比较方便：

$$\begin{gathered}\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu+g[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]-\mathscr{F}_{\mu\nu}=0,\\ \partial_\mu\mathscr{F}_{\mu\nu}-g[\mathscr{A}_\mu,\ \mathscr{F}_{\mu\nu}]=0.\end{gathered} \tag{2.62}$$

我们来考察在三维形式下写出的这些方程。采用符号$\mu=(0,k)$，$\nu=(0,l)$，等等，(2.62)式的10个方程改写为

$$\left.\begin{aligned}&\partial_0\mathscr{F}_{0k}=\partial_l\mathscr{F}_{lk}-g[\mathscr{A}_l,\mathscr{F}_{lk}];\\ &\partial_0\mathscr{A}_k=\mathscr{F}_{k0};\\ &\mathscr{F}_{ik}=\partial_k\mathscr{A}_i-\partial_i\mathscr{A}_k+g[\mathscr{A}_i,\mathscr{A}_k];\\ &\mathscr{C}(x)=\partial_k\mathscr{F}_{0k}-g[\mathscr{A}_k,\mathscr{F}_{0k}]=0.\end{aligned}\right\} \tag{2.63}$$

从上式的前三个方程中消去变量 $\mathscr{F}_{ik}$，可以看到它们有明显的哈密顿形式：

$$\left.\begin{aligned}
\partial_0 E_k^a(\vec{x},t) &= -\frac{\delta H}{\delta A_k^a(\vec{x},t)} = \{H, E_k^a(\vec{x},t)\};\\
\partial_0 A_k^a(\vec{x},t) &= \frac{\delta H}{\delta E_k^a(\vec{x},t)} = \{H, A_k^a(\vec{x},t)\};\\
H &= \int h d^3x,
\end{aligned}\right\} \tag{2.64}$$

其中应用了前面介绍过的符号 E_k^a, h 和泊松括号[注1]。(2.63)式中最后一个方程

$$\mathscr{C}(\vec{x},t) = 0 \tag{2.65}$$

是一个约束方程。正象已经看到过的那样，泊松括号 $\{H, \mathscr{C}(\vec{x},t)\}$等于零

$$\{H, \mathscr{C}(\vec{x},t)\} = \partial_0 \mathscr{C}(\vec{x},t) = 0, \tag{2.66}$$

因而 $\mathscr{C}(\vec{x},t)$ 产生无穷多个运动积分。

我们来证明，$\mathscr{C}(\vec{x})$ 是加上规范条件 $\mathscr{A}_0 = 0$ 以后留下来的无穷小规范变换的生成元。为此，将伴随表示 $\Omega(x)$ 中的任意矩阵 $\alpha(\vec{x})$ 和下面的量相联系[注2]。

$$C(\alpha) = -\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left\{\int \mathscr{C}(\vec{x})\alpha(\vec{x})d^3x\right\}. \tag{2.67}$$

在这一符号下，对易关系 (2.7) 式改写为

$$\{C(\alpha),\ C(\beta)\} = gC([\alpha,\beta]). \tag{2.68}$$

这表明，$C(\alpha)$确定了由矩阵 $\alpha(\vec{x})$[注3]组成的规范变换群的李代数表示。这一表示对变量 $\mathscr{A}(x)$ 和 $\mathscr{E}(x)$ 的作用由下式给出

$$\left.\begin{aligned}
\delta\mathscr{A}_l &= \{C(\alpha),\ \mathscr{A}_l(x)\} = \partial_l\alpha(\vec{x}) - g[\mathscr{A}_l(x),\ \alpha(\vec{x})];\\
\delta\mathscr{E}_k &= \{C(\alpha),\ \mathscr{E}_k(x)\} = -g[\mathscr{E}_k(x),\ \alpha(\vec{x})].
\end{aligned}\right\} \tag{2.69}$$

[注1] 原书中 E_k 无上标 a。——译者

[注2] 原书下式中的被积函数为 $\mathscr{C}(x)\alpha(x)$。——译者

[注3] 原书中为 $\alpha(x)$。——译者

这样，$C(\alpha)$ 的确是在哈密顿规范中遗留下来的规范变换的生成元。

按照相对性原理，可测量 $O(\mathscr{A}_k, \mathscr{E}_k)$ 是规范不变的，因而必定与 $C(\alpha)$ 可对易. 这个条件是一组一阶微分方程，(2.68)式是这组方程的可积性条件，并将 O 所依赖的六个函数 $\mathscr{A}_k$，$\mathscr{E}_k$ 之一用其它几个函数表示. 这和约束条件 (2.65) 式一道，将独立函数的数目约减到四个，和库仑规范中算出的自由度数目相一致.

让我们看看这一经典图象如何转到量子情况. 在算符形式中，哈密顿量 H，约束 C 和可测量 O 变成了算符，它们满足对易关系

$$\frac{1}{i}[C(\alpha),\ C(\beta)] = gC([\alpha,\beta]);\qquad (2.70)$$
$$[H,C(\alpha)] = 0;\quad [O,C(\alpha)] = 0.$$

我们不能直接让算符 C 等于 0，然而 (2.70) 式表明，存在一个由满足方程

$$C\psi = 0 \qquad (2.71)$$

的矢量 ψ 形成的子空间，而且这一子空间对于可测量所对应的算符是不变的. 条件 (2.71) 式代替了经典方程 $C=0$，它所构成的子空间是我们的物理系统状态的真实空间.

并不一定非要在物理的子空间中描述动力学不可. 更简单些是在整个空间中考查算符 $\exp\{-iHt\}$，而只对计算矩阵元的状态加上条件 (2.71) 式. 由于 H 和 C 可对易，这一种处理方法是可行的.

在过渡到 S 矩阵时，注意对于渐近态，(2.71) 式简化了. 可以证明

$$\lim_{|t|\to\infty} e^{iH_0t}C(\alpha)e^{-iH_0t} = C_0(\alpha) + O(1), \qquad (2.72)$$

其中

$$C_0(\alpha) = -\frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\partial_k \mathscr{E}(\vec{x},t)\alpha(\vec{x})d^3x \tag{2.73}$$

是线性规范变换

$$\delta\mathscr{E}_k = 0; \quad \delta\mathscr{A}_k = \partial_k\alpha(\vec{x}) \tag{2.74}$$

的生成元，而 H_0 是自由场能量算符，且

$$H_0 = -\frac{1}{4}\mathrm{tr}\int(\mathscr{E}_k^2 + (\partial_k\mathscr{A}_l - \partial_l\mathscr{A}_k)^2)d^3x. \tag{2.75}$$

的确，$C(\alpha)$ 与 $C_0(\alpha)$ 的差为

$$C_1(\alpha) = \mathrm{tr}\int[\mathscr{E}_k, \mathscr{A}_k]\alpha d^3x, \tag{2.76}$$

它对场 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{E}$ 是二次的，而因此算符

$$\exp\{-iH_0t\}C_1(\alpha)\exp\{iH_0t\}$$

的系数函数在 $|t|\to\infty$ 时减小。

算符 C_0 与 H_0 及 S 矩阵可对易。这可用以下的形式运算证明：

$$\begin{aligned} SC_0 &= \lim_{\substack{t''\to+\infty\\ t'\to-\infty}} e^{iH_0t''}e^{-iH(t''-t')}e^{-iH_0t'}C_0 \\ &= \lim_{\substack{t''\to+\infty\\ t'\to-\infty}} e^{iH_0t''}e^{-iH(t''-t')}Ce^{-iH_0t'} \\ &= \lim_{\substack{t''\to+\infty\\ t'\to-\infty}} e^{iH_0t''}Ce^{-iH(t''-t')}e^{-iH_0t'} \\ &= \lim_{\substack{t''\to+\infty\\ t'\to-\infty}} C_0e^{iH_0t''}e^{-iH(t''-t')}e^{-iH_0t'} = C_0S. \end{aligned} \tag{2.77}$$

满足渐近条件

$$C_0\psi = 0 \tag{2.78}$$

的态矢量 $\psi(a_l^*)$ 由下式给出

$$\psi(a^*) = \exp\left\{\frac{1}{2}\int a^{*L}(\vec{k})a^L(\vec{k})d^3k\right\}\overline{\psi}(a^{*T}), \tag{2.79}$$

其中 a^L 和 a^T 分别为 $a(\vec{k})$ 的平行于和垂直于矢量 $\vec{k}$ 的分量。我们看到，矢量 $\psi(a^*)$ 实际上只依赖于两个极化。根据以上给出的证明，这一子空间对 S 矩阵是不变的。

在用路径积分表达时，以上的论断应重新叙述如下。在整个空间中的 S 矩阵由下述路径积分定义[注]

$$S=\lim_{\substack{t''\to+\infty\\ t'\to-\infty}}\int\exp\left\{\int d^3k\frac{1}{2}\left[a_l^{*b}(\vec{k},t'')a_l^b(\vec{k},t'')+a_l^{*b}(\vec{k},t')\right.\right.$$

$$\left.\times a_l^b(\vec{k},t')\right]+i\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\left(-\frac{1}{4}\right)\mathrm{tr}\left[\mathscr{E}_l(\vec{x},t)\dot{\mathscr{A}}_l(\vec{x},t)\right.$$

$$\left.\left.-\dot{\mathscr{E}}_l(\vec{x},t)\mathscr{A}_l(\vec{x},t)-\mathscr{E}_l^2(\vec{x},t)-\mathscr{G}_l^2(\vec{x},t)\right]\right\}\prod_{\vec{x},t}d\mathscr{A}_l d\mathscr{E}_l.$$

(2.80)

对 $\mathscr{E}$ 积分，得到

$$S=\int_{\mathscr{A}_{\vec{k}}\to\mathscr{A}_{\vec{k}}^{\text{入}}_{\text{出}}}\exp\left\{i\int dx\left[-\frac{\mathrm{tr}}{4}\left(\dot{\mathscr{A}}_l^2-\mathscr{G}^2\right)\right]\right\}\prod_{\vec{x}}d\mathscr{A}_k, \tag{2.81}$$

其中，和库仑规范中的类似公式不一样，边界条件加在 $\mathscr{A}_k$ 的所有三个分量上。

通过形式地对 $\mathscr{A}_0$ 积分，可以将上式指数中的作用量化为相对论不变的形式，得到

$$S=\int_{\mathscr{A}_{\vec{k}}\to\mathscr{A}_{\vec{k}}^{\text{入}}_{\text{出}}}\exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{8}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\right]\right\}\prod_{\vec{x}}\delta(\mathscr{A}_0)d\mathscr{A}_\mu. \tag{2.82}$$

这一积分也可以根据相对性原理来理解：它是在另一种规范条件下，对规范不变场类的积分。积分测度比库仑规范情况简单，不包含行列式。

[注] 原书下式中对 t 的积分下限为 t''，积分上限为 t'。 ——译者

图形规则中的传播子有以下形式

$$D^H_{lm} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\frac{1}{k_0^2}\left[\delta_{lm}+(k^2\delta_{lm}-k_lk_m)(k^2+i0)^{-1}\right]dk. \tag{2.83}$$

为了进行计算，需解方程

$$\partial_\mu(\partial_\mu \mathscr{A}_k-\partial_k \mathscr{A}_\mu)+\mathscr{T}_k=0,\quad \mathscr{A}_0=0, \tag{2.84}$$

它在我们的边界条件下有解：

$$\mathscr{A}_k=\mathscr{A}_k^{(0)}+\int D^H_{kl}(x-y)\mathscr{T}_l(y)dy. \tag{2.85}$$

这一公式表明，和库仑规范情况一样，只有三维横向分量 $\mathscr{A}_k^T$在时间中传播。

§3.3 协变量子化规则和费曼图方法

前已指出，上节中得到的 S 矩阵表达式不是明显协变的。这对于进行微扰论计算，物别是对于重整化，很不方便。路径积分方法能够克服这一缺陷。相对性原理启发我们，为了达到这一目的，需要对规范等效场类进行相对论不变的参数化，也就是说，要选择相对论不变的规范。

最简单的相对论不变的规范条件是洛仑兹条件

$$\partial_\mu \mathscr{A}_\mu=0. \tag{3.1}$$

我们将把已知的 S 矩阵在库仑规范中的表达式过渡到洛仑兹规范中。从几何观点看来，就是要沿着规范群的轨道从定义在面 $\Phi_C \equiv \partial_k \mathscr{A}_k=0$ 上的测度过渡到定义在面 $\Phi_L\equiv\partial_\mu \mathscr{A}_\mu=0$ 上的测度。形式上，这可以用下述方法达到. 利用条件

$$\Delta_L(\mathscr{A})\int\prod_x\delta(\partial_\mu \mathscr{A}_\mu^\omega)d\omega=1, \tag{3.2}$$

引入泛函$\Delta_L(\mathscr{A})$，其中的积分对测度 $\prod_x d\omega(x)$ 进行，而 $d\omega$ 是群 Ω 上的不变测度：

$$d(\omega\omega^0)=d(\omega^0\omega)=d\omega. \tag{3.3}$$

泛函 $\Delta_L(\mathscr{A})$ 显然是规范不变的

$$\Delta_L(\mathscr{A}^{\omega})=\Delta_L(\mathscr{A}), \tag{3.4}$$

这可以直接从积分测度的不变性得到证明。

利用(3.2)式可以将 S 矩阵的表达式(2.46)式改写为

$$S=N^{-1}\int\exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{8}\operatorname{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\right]\right\}\prod_{x}\delta(\partial_k\mathscr{A}_k)$$
$$\times\prod_{t}\det M_c(\mathscr{A})\Delta_L(\mathscr{A})\prod_{x}\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu^{\omega})d\omega d\mathscr{A}. \tag{3.5}$$

注意，泛函 $\prod\limits_{t}\det M_C(\mathscr{A})$ 在面 $\Phi_C=\partial_k\mathscr{A}_k=0$ 上和规范不变的泛函 $\Delta_C(\mathscr{A})$ 相吻合；$\Delta_C(\mathscr{A})$ 的定义类似于 $\Delta_L(\mathscr{A})$[注]

$$\Delta_C(\mathscr{A})\int\prod_{x}\delta(\partial_k\mathscr{A}_k^{\omega})d\omega=1. \tag{3.6}$$

实际上，如果 $\mathscr{A}_k$ 满足条件 $\partial_k\mathscr{A}_k=0$，则 $\omega=1$ 显然是 δ 函数的宗量的根（在微扰论范围内唯一的根）。因此，在（3.6）式中只需要在单位元素附近进行积分。对于 $\omega(x)\approx1+u(x)$ 我们有

$$\partial_k\mathscr{A}_k^{\omega}=\Delta u-g[\mathscr{A}_k(x),\partial_k u(x)]=M_C u(x), \tag{3.7}$$

而

$$\prod_{x}d\omega(x)=\prod_{x}du(x). \tag{3.8}$$

这样，积分可以明显算出，得到

$$\Delta_C(\mathscr{A})\big|_{\partial_k\mathscr{A}_k=0}=\prod_{t}\det M_C(\mathscr{A}). \tag{3.9}$$

让我们回到（3.5）式，在那里，正如已经证明的那样，可以令

$$\prod_{x}\delta(\partial_k\mathscr{A}_k)\prod_{t}\det M_C=\prod_{x}\delta(\partial_k\mathscr{A}_k)\Delta_C. \tag{3.10}$$

进行变量代换

$$\mathscr{A}_\mu\rightarrow\mathscr{A}_\mu^{\omega^{-1}}, \tag{3.11}$$

[注] 原书下式中无 $\prod\limits_{x}$。 ——译者

它的雅可比显然等于 1．由于作用量和因子 Δ_L，Δ_C 的不变性，(3.5) 式可以改写为

$$S=N^{-1}\int \exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{8}\operatorname{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\right]\right\}\prod_x \delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)\Delta_L(\mathscr{A})$$

$$\times\delta(\partial_k\mathscr{A}_k^{\omega^{-1}})\Delta_C(\mathscr{A})d\omega d\mathscr{A}. \qquad (3.12)$$

在对 $d\omega$ 的积分中，用 $\mathscr{A}^{\omega}$ 代 $\mathscr{A}^{\omega^{-1}}$，并利用 (3.6) 式，我们看到，(3.12) 式的被积函数中的后面两个因子被约去．其结果，得到洛仑兹规范中的 S 矩阵表达式

$$S=N^{-1}\int \exp\left\{i\int dx\left[\frac{1}{8}\operatorname{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\right]\prod_x\right.$$

$$\Delta_L(\mathscr{A})\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)d\mathscr{A}. \qquad (3.13)$$

利用与(3.9)式相类似的讨论，可以证明，在表面$\Phi_L\equiv\partial_\mu\mathscr{A}_\mu(x)=0$上，泛函$\Delta_L$等于

$$\Delta_L(\mathscr{A}_\mu)\,|_{\partial_\mu\mathscr{A}_\mu}=\det M_L, \qquad (3.14)$$

其中算符 M_L 由下式定义

$$M_L\alpha(x)=\Box\alpha-g\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,\alpha]=\Box\alpha+W(\mathscr{A})\alpha. \qquad (3.15)$$

提醒一下，在第一节中，当讨论规范条件的相容性时，已经碰到过这里出现的行列式 $\det M_C$ 和 $\det M_L$。

我们还没有讨论变量代换对 (2.6) 式中的渐近条件的影响。因此，(3.13) 式还多少有些形式。特别是，我们的论证没有说清楚对 M_L 的行列式应赋予什么意义。为了在变量 x 的整个空间中给出算符 M_L 的自洽的定义，需要知道 $t\to\pm\infty$时的边界条件。这一问题可以用另一方式表述如下：为了定义行列式，很自然地是用公式

$$\det M_L=\exp\{\operatorname{Tr}\ln M_L\}$$
$$=\exp\{\operatorname{Tr}\ln\Box+\operatorname{Tr}\ln(1+\Box^{-1}W(\mathscr{A}))\} \qquad (3.16)$$

这里，符号 T_r 表示包括对坐标积分在内的求迹运算。第一个因

子是一个无关紧要的常数，它只不过改变归一化常数N。第二个因子在作用量中产生如下形式的附加项：

$$\mathrm{Tr}\ln(1+\Box^{-1}W(\mathscr{A}))=\sum_n\frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{Tr}(\Box^{-1}W)^n$$

$$=-\frac{g^2}{2}\int dx_1dx_2\mathrm{tr}\{\mathscr{A}_{\mu_1}(x_1)\mathscr{A}_{\mu_2}(x_2)\}\partial_{\mu_1}D(x_1-x_2)$$

$$\times\partial_{\mu_2}D(x_2-x_1)-\cdots$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{g^n}{n}\int dx_1\cdots dx_n\mathrm{tr}\{\mathscr{A}_{\mu_1}(x_1)\cdots\mathscr{A}_{\mu_n}(x_n)\}$$

$$\times\partial_{\mu_1}D(x_1-x_2)\cdots\partial_{\mu_n}D(x_n-x_1)-\cdots,\qquad(3.17)$$

其中$D(x)$是达朗贝尔(d'Alembert)算符的格林函数。这一格林函数不是唯一确定的，为了唯一地确定它，需要加上边界条件。实际上，定义格林函数是一个如何绕过积分

$$D=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\frac{e^{-ikx}}{k^2}dx\qquad(3.18)$$

的极点的问题。在决定洛仑兹规范中的二次型的格林函数$D^L_{\mu\nu}(x-y)$时，遇到过类似的问题。通过对二次型求逆得到的形式答案是

$$D^L_{\mu\nu}(x-y)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ik(x-y)}\left\{g^{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right\}\frac{1}{k^2}dk.\qquad(3.19)$$

在此式中也需要弄清楚如何绕过被积函数的极点。

为了回答关于边界条件的问题，需要在过渡到时间的极限$t''\to\infty$，$t'\to-\infty$之前，进行一个从(2.46)式到(3.13)式的变换。提醒一下，在库仑规范中，除了加在势$\mathscr{A}^T_k$的三维分量上的边界条件之外，还存在条件

$$\partial_k\mathscr{A}_k=0,\qquad(3.20)$$

它在整个时间区间$t'\leqslant t\leqslant t''$都满足。变量代换

$$\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}_\mu^{\omega^{-1}}=\omega^{-1}\mathscr{A}_\mu\omega+\partial_\mu\omega^{-1}\omega\qquad(3.21)$$

不会破坏这一条件。

由此得到加在ω上的限制

$$\omega(\vec{x},t'')=1,\qquad \omega(\vec{x},t')=1, \tag{322}$$

它保证了不出现空间导数$\partial_k\omega$. 注意，并不需要时间导数$\partial_0\omega$在$t=t'$和$t=t''$等于零，因为在(2.46)式中没有对$t=t'$和$t=t''$的$\mathscr{A}_0$加上什么条件. 这一变换也不改变$t'\to-\infty$和$t''\to+\infty$时横向分量$\mathscr{A}_k^T$的边界值，因为在此极限下，变换(3.21)式是线性的，并且归结为代换

$$\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\alpha, \tag{3.23}$$

其中

$$\omega=\exp\{\alpha\}. \tag{3.24}$$

这样，由(3.15)式给出的算符M_L的形式定义必须补充以边界条件

$$\alpha(\vec{x},t'')=\alpha(\vec{x},t')=0. \tag{3.25}$$

在将行列式展开成微扰论级数时，出现的格林函数D是带有同一边界条件的达朗贝尔算符的格林函数. 在$x_0\leqslant y_0$时，这一函数有如下形式[注]

$$D_1(x,y)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(x-y)}\frac{\sin[|\vec{k}|(x_0-t')]\sin[|\vec{k}|(y_0-t'')]}{|\vec{k}|\sin[|\vec{k}|(t''-t')]}\times d^3k,$$

$$x_0\leqslant y_0; \tag{3.26}$$

当$x_0\geqslant y_0$时，$D_1(x,y)$由对称条件

$$D_1(x,y)=D_1(y,x)$$

决定.

这样来定义算符M_L，则它的行列式在微扰论范围内是正的，而这就证明在(3.14)式中用它来代替$|\det M_L|$是对的.

在格林函数$D_{\mu\nu}^L$中如何绕过极点的问题可以用类似的方法解决. 为了在有限的t', t''定义它，必须解方程

$$\Box\mathscr{A}_\mu=\mathscr{T}_\mu,\qquad \partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0, \tag{3.27}$$

[注] 原书下式分母为$(t''-t)$. ——译者

其中$\mathscr{T}_\mu$满足相容性条件

$$\partial_\mu \mathscr{T}_\mu = 0. \tag{3.28}$$

这一系统的边界条件是

$$a_i^*(\vec{k},t'') = a_i^*(\vec{k})e^{i\omega t''},\quad a_i(\vec{k},t') = a_i(\vec{k})e^{-i\omega t'}$$

$$(i=1,2); \tag{3.29}$$

当$t=t'$；$t=t''$时，$\partial_k \mathscr{A}_k(\vec{x},t)=0$.

(3.27) 式$\mathscr{A}_0$的边界条件，有如下形式

$$\partial_0 \mathscr{A}_0 = 0,\quad t=t',\quad t=t''. \tag{3.30}$$

方程组 (3.27) 式的解如下：

$$\mathscr{A}_l^T(x) = \mathscr{A}_l^{T_0}(x) + \int \widetilde{D}(x,y)\mathscr{T}_l^T(y)dy, \tag{3.31}$$

其中[注1]

$$A_l^{bT_0}(x) = \sum_{i=1,2}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[\,e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}a_i^b(\vec{k})u_l^i(\vec{k})$$

$$+e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}a_i^{b*}(\vec{k})u_l^i(-\vec{k})\,]\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}}, \tag{3.32}$$

矢量$u_l^i(\vec{k})$是在前面的 (2·43) 式中已经引入过的矢量. 格林函数$\widetilde{D}(x,y)$有如下形式

$$\widetilde{D}(x,y) = D_C(x-y)\theta(t''-y_0)\theta(y_0-t'), \tag{3.33}$$

并在$t'\to-\infty$，$t''\to+\infty$时过渡到因果格林函数$D_C(x-y)$. 剩下的分量$\mathscr{A}_l^L(x)$和$\mathscr{A}_0(x)$由下式给出[注2]

$$\mathscr{A}_0(x) = \int D_2(x,y)\mathscr{T}_0(y)dy; \tag{3.34}$$

$$\mathscr{A}_l^L(x) = \int D_2(x,y)\mathscr{T}_l^L(y)dy,$$

其中$D_2(x,y)$是达朗贝尔算符在边界条件

$$\partial_0 a|_{t=t''} = \partial_0 a|_{t=t'} = 0 \tag{3.35}$$

[注1] 原书下式被积函数中无方括号. ——译者

[注2] 原书A_l^L无宗量(x). ——译者

之下的格林函数，它有如下形式[注]

$$D_2(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{ik(x-y)}$$

$$\times\frac{\cos[|\vec{k}|(x_0-t')]\cos[|\vec{k}|(y_0-t'')]}{|\vec{k}|\sin[|\vec{k}|(t''-t')]}d^3k,$$

$$x_0\leqslant y_0, \tag{3.36}$$

当 $x_0\geqslant y_0$ 时，$D_2(x,y)$ 由对称条件决定。结合 (3.33)、(3.36) 和 (3.26) 式，我们得到洛仑兹规范下与库仑边界条件相容的有限时间间隔格林函数。

让我们在以上得到的表达式中过渡到 $t''\to\infty$，$t'\to-\infty$的极限。函数 $\tilde{D}(x,y)$ 的极限存在，并等于因果格林函数 $D_C(x-y)$。这和三维横向分量 $A_l^T(x)$ 对应于物理极化的事实一致。

函数$D_1(x,y)$和$D_2(x,y)$在$t''\to+\infty$和 $t'\to-\infty$时没有极限。与此同时，决定洛仑兹规范下的 S 矩阵的积分(3.13)式必然存在极限，因为按照构造它的方式，这一积分等于库仑积分 (2.46) 式，且后者的极限是存在的。这意味着，在把 (3.13) 式展开成微扰论级数时，函数 D_1 和 D_2 的总贡献趋于一个有限的极限。形式上计算这一极限的最简单方法是用相同的方式将函数 D_1 和 D_2 正规化，例如给积分变量 $\vec{k}^2$ 加上一个无穷小虚部。这样正规化的结果，D_1 和 D_2 的被积函数中的振荡指数函数在$|t'|$，$|t''|$大时或者增加或者减小，而极限将会存在。最方便的是假定 $\vec{k}^2$有一个负的虚部 $-i0$，因为在此情况下函数 D_1 和 D_2 的极限是因果函数 $D_C(x)$。这样我们对洛仑兹规范下的完全的格林函数得到明显协变的表达式

$$D^L_{\mu\nu}(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int\left(g^{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}\right)\frac{1}{k^2+i0}e^{-ikx}dk. \tag{3.37}$$

与此同时，在将行列式 $\det M_L$ 展开成微扰论级数时，所出现的

[注] 原书下式中为 $x^0\leqslant y^0$。 ——译者

格林函数也变成因果的，而行列式本身变成为 $\mathscr{A}_\mu$ 的复值泛函。

要再次强调，这里所用的特殊的正规化不是唯一可能的。例如，作代换 $\vec{k}^2\to\vec{k}^2+i0$ 将会对非物理的极化得到反时格林函数，而行列式的虚部会变号。然而这样会使格林函数 $D^L_{\mu\nu}$ 失去明显的协变性。

由以上的讨论，我们对前面提出的问题得到如下答案：格林函数极点的所有回路都可以看成是费曼的，那就是说，应该将 $1/\vec{k}^2$ 理解为 $(\vec{k}^2+i0)^{-1}$。这样，洛仑兹规范中的 S 矩阵有如下形式

$$S=N^{-1}\int_{\substack{\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}_{\mu\text{入,出}}\\ t\to\mp\infty}}\exp\left\{i\int\frac{1}{8}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}dx\right\}$$

$$\times\prod_x\Delta_L(\mathscr{A})\,\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)d\mathscr{A},\tag{3.38}$$

其中，$\mathscr{A}_{\mu\text{入,出}}$是方程

$$\Box\mathscr{A}_\mu=0,\qquad\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=0\tag{3.39}$$

的解，它的振幅 $a_\mu(\vec{k})$ 和 $a^*_\mu(\vec{k})$ 满足条件

$$a_0=0,\quad k_la_l=0;\quad a^*_0=0,\quad k_la^*_l=0,\tag{3.40}$$

振幅 $a_l(\vec{k})$ 包含在 $\mathscr{A}_\text{入}$(入射波)中，而 $a^*_l(\vec{k})$ 包含在 $\mathscr{A}_\text{出}$（出射波）中。

从哈密顿规范中 $\mathscr{A}_0=0$ 出发，也可以如以上类似地推导出 (3.13) 式。差别只在于：第一，在表面 $\mathscr{A}_0=0$ 上的积分 $\int\delta(\mathscr{A}^\omega_0)d\omega$ 不依赖于 $\mathscr{A}_\mu$，从而 $\Delta_H=1$；第二，代换 $\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}^\omega_\mu$ 表明，应该用条件

$$\partial_0\omega(\vec{x},t)=0\qquad\text{当 } t=t' \text{ 和 } t=t'' \text{ 时},\tag{3.41}$$

这使得全传播子 $D^L_{\mu\nu}$ 由格林函数 D_C 构成。得到的最终结果显然与前面的相同。

(3.38)式不是S矩阵的唯一的相对论不变表达式。对规范不变类的积分可以用其它方法完成，而不必一定要靠规范条件的帮助从每一类中选出一个代表。分析我们从库仑规范到洛仑兹规范的过渡可以看出，在(3.2)式中并不一定要用δ函数型的泛函作为被积函数。实际上我们可以选择任意一个不是规范不变的泛函$B(\mathscr{A})$，只要对它说来，

$$\Delta_B^{-1}(\mathscr{A})=\int[B(\mathscr{A}_\mu^\omega)]\prod_x d\omega \qquad (3.42)$$

收敛。其结果，出现了一个S矩阵的路径积分，其中$\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)\det M_L(\mathscr{A})$被$\Delta_B(\mathscr{A}_\mu)B(\mathscr{A}_\mu)$代替。取泛函

$$\exp\left\{-\frac{i}{4\alpha}\int \mathrm{tr}(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)^2dx\right\} \qquad (3.43)$$

作为$B(\mathscr{A})$，我们得到一族自由格林函数

$$D_{\mu\nu}^\alpha(x)=-\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\left\{g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu(1-\alpha)}{k^2+i0}\right\}\frac{1}{k^2+i0}, \qquad (3.44)$$

它包含应用最广的特殊情况：在$\alpha=0$时回到洛仑兹规范，而在$\alpha=1$时得到对角的格林函数。

我们将给出一些尽可能简单的形式讨论来证明上述步骤的正确性。第一，让我们用从库仑规范过渡到洛仑兹规范的同样的推理，从洛仑兹规范过渡到推广的洛仑兹规范：

$$\partial_\mu\mathscr{A}_\mu(x)=a(x). \qquad (3.45)$$

相应的泛函$\Delta_a(\mathscr{A})$由下式给出

$$[\Delta_a(\mathscr{A})]^{-1}=\int\prod_x\delta[\partial_\mu\mathscr{A}_\mu^\omega-a(x)]d\omega, \qquad (3.46)$$

在表面

$$\partial_\mu\mathscr{A}_\mu=a(x) \qquad (3.47)$$

上，它与泛函$\det M$相等，其中的算符M由(3.15)式给出。这样，

S 矩阵的生成泛函（3.38）式可以恒等地改写为

$$S = N^{-1} \int_{\mathscr{A} \to \mathscr{A}_{\text{入}}^{\text{出}}} \exp\left\{ i \int \frac{1}{8} \operatorname{tr} \mathscr{F}_{\mu\nu} \mathscr{F}_{\mu\nu} dx \right\}$$

$$\times \prod_x \delta(\partial_\mu \mathscr{A}_\mu - a(x)) \det M \, d\mathscr{A}. \qquad (3.48)$$

因为原始的泛函不依赖于 a，我们可以将它按权重

$$\exp\left\{ -i \frac{1}{4\alpha} \operatorname{tr} \int a^2(x) dx \right\} \qquad (3.49)$$

对 $a(x)$ 积分，这只不过改变归一化常数 N。完成这一积分，我们得到 S 矩阵生成泛函为如下形式

$$S = N^{-1} \int_{\mathscr{A} \to \mathscr{A}_{\text{入}}^{\text{出}}} \exp\left\{ i \int \operatorname{tr} \left[\frac{1}{8} \mathscr{F}_{\mu\nu} \mathscr{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{4\alpha} (\partial_\mu \mathscr{A}_\mu)^2 \right] dx \right\}$$

$$\times \prod_x \det M \; d\mathscr{A}. \qquad (3.50)$$

我们将推广规范条件的概念，称这一泛函为 S 矩阵在 α 规范中的泛函。

将这一泛函展开成微扰论级数就产生了（3.44）式的图形规则。为了使这种推理更严格，必须更仔细地处理边界条件。这里我们不这样做，而只限于指出，所有格林函数都可以选成因果的。不同规范中的 S 矩阵的等效性将在下章中结合重整化问题更详细地讨论。

可以引入更普遍形式的规范，对它们说来，杨-米尔斯场格林函数的纵向部分是 k^2 的任意函数。为此，只要用一个形式为

$$\exp\left\{ -\left(\frac{i}{4\alpha} \right) \operatorname{tr} [f(\Box) \partial_\mu \mathscr{A}_\mu]^2 dx \right\}$$

的表达式来作为泛函 $B(\mathscr{A})$，其中 $f(\Box)$ 是达朗贝尔算符的一个任意函数。以上对于 $f \equiv 1$ 的情况所作的推理可以不加任何改变地应用到这种情况。这种形式的规范将在下面讨论正规化和重整化时用到。

(3.50) 式包含非局域泛函 det$M$，因此看起来不同于我们所熟悉的费曼泛函 exp{$i\times$作用量} 对所有场的积分。然而，我们可以用 det$M$ 的积分表示

$$\det M=\int\exp\left\{\ i\int\bar{c}^{a}(x)M^{ab}c^{b}(x)dx\right\}\prod_{x}d\bar{c}dc, \qquad (3.51)$$

其中 $\bar{c}(x)$ 和 $c(x)$ 是反对易标量函数（格拉斯曼代数的生成元）。为了能得到前面所选择的M，要求 $\bar{c}$，c 满足费曼型边界条件

$$\begin{aligned} &d_{出}^{a*}(\vec{k})=0\ , \quad g_{出}^{a*}(\vec{k})=0\ , \\ &d_{入}^{a}(\vec{k})=0\ , \quad g_{入}^{a}(\vec{k})=0\ , \end{aligned} \qquad (3.52)$$

其中，d，g，d^*，g^* 由通常的公式给出。

$$\left.\begin{aligned} c^{a}(\vec{x},t)_{\substack{入\\出}}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Big[e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}d_{\substack{入\\出}}^{a}(\vec{k}) \\ &\qquad+e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}g_{\substack{入\\出}}^{a*}(\vec{k})\Big]\frac{d^{3}k}{\sqrt{2\omega}}, \\ \bar{c}^{a}(\vec{x},t)_{\substack{入\\出}}&=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\Big[e^{i\vec{k}\vec{x}-i\omega t}g_{\substack{入\\出}}^{a}(\vec{k}) \\ &\qquad+e^{-i\vec{k}\vec{x}+i\omega t}d_{\substack{入\\出}}^{a*}(\vec{k})\Big]\frac{d^{3}k}{\sqrt{2\omega}}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.53)$$

利用这一表达式可以将 (3.50) 式改写为

$$\begin{aligned} S=N^{-1}\int\exp\Big\{\ i\int\mathrm{tr}\Big[&\frac{1}{8}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}-\frac{1}{4\alpha}(\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\mu})^{2} \\ &-\frac{1}{2}\bar{c}(\Box c-g\partial_{\mu}[\mathscr{A}_{\mu},\ c])\Big]dx\Big\}\prod_{x}d\mathscr{A}d\bar{c}dc. \end{aligned} \qquad (3.54)$$

其中，在 $t\to\pm\infty$时，

$$\mathscr{A}_{\mu}\to\mathscr{A}_{\mu\substack{入\\出}};\quad c\to c_{\substack{入\\出}};\quad \bar{c}\to\bar{c}_{\substack{入\\出}};\quad c=c^{a}t^{a}. \qquad (3.55)$$

以引进虚构的场 $\bar{c}$，c 为代价，我们成功地将 S 矩阵表达成了对 exp{$i\times$作用量}的积分，从而考虑了相对性原理。这里的作用量是局域的，具有不退化的二次型，并且积分是对所有的场进行。这使我们能够象前一章中从高斯型积分出发对于标量场所做的那样，对于泛函 (3.54) 式建立微扰论。

为了这一目的，引入格林函数的生成泛函：

$$Z(J_\mu,\bar{\xi},\xi)=N^{-1}\int\exp\Big\{i\int\mathscr{L}_a(x)$$

$$+[J^a_\mu A^a_\mu+\bar{\xi}^a c^a+\bar{c}^a\xi^a]dx\Big\}\prod_x d\mathscr{A}\,d\bar{c}dc$$

$$=\exp\Big\{iV\Big\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu},\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\bar{\xi}},\ \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi}\Big\}\Big\}$$

$$\times\exp\Big\{-\frac{i}{2}\int[J^a_\mu(x)D^{\alpha ab}_{\mu\nu}(x-y)J^b_\nu(y)$$

$$+2\bar{\xi}^a(x)D^{ab}(x-y)\xi^b(y)]dxdy\Big\},\qquad(3.56)$$

其中 J^a_μ，$\bar{\xi}^a$，ξ^a 是场 A^a_μ，c^a，$\bar{c}^c$ 的源，ξ^a 和 $\bar{\xi}^b$ 之间相互反对易，并与场 $\bar{c}^a$，c^b 反对易，且

$$V(\mathscr{A}_\mu,\bar{c},c)=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\int\{2g(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]$$

$$+g^2([\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu])^2+g\bar{c}\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,c]\}dx;\qquad(3.57)$$

对 $\bar{\xi}$ 的导数看成为左导数，对 ξ 的导数看成为右导数. 在(3.56)式中，所有的积分变量都满足费曼边界条件. 对泛函 Z 作微扰论图形展开就产生了图形规则. 下面将它的基本元素列出来（从一开始就用动量表象）：

1. 矢量粒子的传播子

$$p\ \overset{\mu,a\qquad\nu,b}{\sim\!\sim\!\sim\!\sim}\ =D^{ab}_{\mu\nu}(k)=-\frac{\delta^{ab}}{k^2+i0}\Big(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2+i0}(1-\alpha)\Big).$$

(3.58)

2. 矢量粒子的自作用[注]

(图：三线顶点，标记 p,μ,a；k,ν,b；q,ρ,c)

$$=V_{\mathscr{A}^3}=-igt_{abc}[(p-k)_\rho g_{\mu\nu}+(k-q)_\mu g_{\nu\rho}$$

$$+(q-p)_\nu g_{\rho\mu}],\qquad(3.59)$$

[注] 原书下式第二行中 $g_{\nu\rho}$. ——译者

$$= V_{A^4} = g^2\{t_{abe}t_{cde}(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) + t_{ace}t_{bde}(g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu}) + t_{ade}t_{cbe}(g_{\mu\rho}g_{\sigma\nu} - g_{\mu\nu}g_{\sigma\rho})\}. \tag{3.60}$$

b,ν $c\ \rho$ a,μ d,σ

3. 虚构的 c 粒子的传播子：

$$\underline{a}\ __\ __\ __\ \underline{b} \quad = D^{ab} = -\frac{\delta^{ab}}{p^2 + i0}. \tag{3.61}$$

4. 虚构的 c 粒子与杨-米尔斯场的相互作用顶点

$$= V_{\bar{c}cA} = \frac{-ig}{2} t_{abd}(k - q)_\mu. \tag{3.62}$$

b,k μ,d,p a,q

包含这些元素的每一个图决定了对于具有 n 条矢量粒子外线和 m 条虚构 c 粒子线的格林函数 $G_{n,m}(k_1,\cdots,k_n|p_1,\cdots,p_m)$ 的贡献.

$$\frac{1}{r}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right)^{L-V-1}(-1)^s, \tag{3.63}$$

一个给定图形的贡献包含有因子其中 V 是顶点数目，L 是内线数目，r 是图形对称群的阶数，而 s 是虚构粒子的封闭圈的数目.

S 矩阵可以利用约化公式由格林函数算出：

$$\begin{aligned} &S_{i_1\cdots i_n,j_1\cdots j_m}(k_1'\cdots k_n', k_1\cdots k_m) \\ &= k_1'^2\cdots k_n'^2 k_1^2\cdots k_m^2\theta(k_{10}')\cdots\theta(k_{n0}') \\ &\times\theta(-k_{10})\cdots\theta(-k_{m0})u_{\mu_1}^{i_1}\cdots u_{\mu_n}^{i_n} \\ &\times G_{\mu_1\cdots\mu_n\nu_1\cdots\nu_m}(k_1'\cdots k_n', k_1\cdots k_m)u_{\nu_1}^{j_1}\cdots u_{\nu_m}^{j_m}\Big|_{\substack{k_i^2=0\\ k_j'^2=0}} \end{aligned} \tag{3.64}$$

在这一公式中，我们将每一条动量为 k 的外矢量线乘上了因子 k^2 和极化矢量 $u_\mu^i=(0,u_l^i)$，$i=1,2$，然后过渡到质壳 $k^2=0$，假定对于每个入射粒子 $k_{i0}>0$，对于每个出射粒子 $k_{i0}<0$. 虚构粒子没有相应的外线，它们仅仅通过封闭圈进入 S 矩阵.

§3.4 与物质场的相互作用

物质场 $\psi(x)$ 与杨-米尔斯场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 的相互作用，对于量子化不产生新的困难．规范群在场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 上作用的公式和没有物质场时相同．因此，只要在场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 上加规范条件，就可以将场 $\mathscr{A}_\mu(x)$、$\psi(x)$ 的规范等效类中的代表场的选择固定下来．这意味着，在决定这些场的 S 矩阵时，可以在相应的路径积分中用前面已经求出的测度对场 ψ 进行积分（例如，对标量场有测度 $\Pi_x d\varphi(x)$，对旋量场有测度 $\Pi_x d\bar{\psi}(x)d\psi(x)$），而作为场 $\mathscr{A}_\mu$ 的测度，可以任意选取一个前一节对真空中的杨-米尔斯场所算出的测度．严格的推导应该基于动力学的哈密顿描述，而这只不过是重复已经阐述过的推理．

与此同时，规范条件也能加在物质场 ψ 上．特别是，对于有对称性自发破缺的模型，这样做是方便的．下面我们来给出这种条件的一个例子．

我们从杨-米尔斯场同旋量场相互作用的例子开始．拉格朗日函数

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8g^2}\mathrm{tr}\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\}+i\bar{\psi}\gamma_\mu\nabla_\mu\psi-m\bar{\psi}\psi \tag{4.1}$$

在规范变换

$$\psi(x)\to\Gamma(\omega)\psi(x);\quad \mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}_\mu^\omega=\omega\mathscr{A}_\mu\omega^{-1}+\partial_\mu\omega\omega^{-1} \tag{4.2}$$

之下不变．哈密顿规范条件

$$\mathscr{A}_0=0 \tag{4.3}$$

是相容的，并导致广义哈密顿描述形式下的运动方程（考虑到场 $\bar{\psi}$、ψ 的反对易性，我们作了自然的修正）：

$$\partial_0\mathscr{A}_k=\frac{\delta h}{\delta\mathscr{F}_{k0}}=\{h,\mathscr{A}\},\ \partial_0\mathscr{F}_{k0}=-\frac{\delta h}{\delta\mathscr{A}_k}=\{h,\mathscr{F}_{k0}\},$$

$$\partial_0\psi=-i\frac{\delta h}{\delta\psi^*}=\{h,\psi\},\partial_0\psi^*=i\frac{\delta h}{\delta\psi}=\{h,\psi^*\}, \tag{4.4}$$

其中 $\psi^* = \bar{\psi}\gamma_0$，

$$h=\int [i\bar{\psi}\gamma_k(\partial_k-\mathscr{A}_k)\psi+m\bar{\psi}\psi-\frac{1}{g^2}\mathrm{tr}(\mathscr{F}_{0k}^2+\mathscr{F}_{ik}^2)]d^3x. \quad (4.5)$$

此外，在运动方程中还有约束

$$C^a(x)=\partial_k F_{k0}^a-t^{abc}A_k^b F_{0k}^c+i\bar{\psi}\gamma_0\Gamma(T^a)\psi, \quad (4.6)$$

它和(2.63)式的差别在于由物质场构成的最后一项．注意，这一项是无相互作用时的守恒流

$$J_\mu^a=\bar{\psi}\gamma_\mu\Gamma(T^a)\psi \quad (4.7)$$

的0-分量．同(2.66)、(2.68)和(2.69)式相似的关系式[注]

$$\{C^a(x),C^b(y)\}=t^{abc}\delta(\vec{x}-\vec{y})C^c(x),$$
$$\{h,C^a\}=0;$$
$$\{C^a(x),A_k^b(y)\}=\delta^{ab}\partial_k\delta(\vec{x}-\vec{y})-t^{abc}A_k^c\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$
$$\{C^a(x),\psi(y)\}=\Gamma(T^a)\psi(x)\delta(\vec{x}-\vec{y});$$
$$\{C^a(x),\bar{\psi}(y)\}=-\Gamma(T^a)\bar{\psi}(x)\delta(\vec{x}-\vec{y}). \quad (4.8)$$

表明，$C^a(x)$是加上规范条件$\mathscr{A}_0=0$后剩下来的规范变换的生成元．这一变换的参数a^a不依赖x_0．

物质场以二次的形式进入$C^a(x)$，因而在$t\to\infty$时对于自由方程的解，约束是线性的

$$C^a(x)_{|t|\simeq\infty}C_0^a(x), \quad (4.9)$$

其中

$$C_0^a=\partial_k F_{k0}^a \quad (4.10)$$

其结果，重复§3.2的讨论，可得结论：在量子情况下，用所有场A_k^a、E_k^a、$\bar{\psi}^a$、ψ^a都起作用的大空间中的哈密顿量H构造的S矩阵与算符$C_0^a(x)$可对易：

$$[S,C_0^a(x)]=0. \quad (4.11)$$

[注] 原书以下各式中的函数均为$\delta(x-y)$。——译者

换句话说，在有物质场存在时，只有物质场的量子和杨-米尔斯场的三维横向量子经受散射.

注意，这一结论和以前一样是基于在大的时间值时约束$C^a(x)$的线性化. 在微扰论范围内，这一线性化看来是很可信的，我们将假定它成立. 与此同时，不能排除当超出微扰论范围时，不发生线性化的可能性. 夸克囚禁的模型正好是建立在这种可能性上的.

回到我们的S矩阵，将它写成路径积分形式：

$$S=\int\limits_{\substack{\mathscr{A}\to\mathscr{A}_{\text{入,出}}\\ \varphi\to\varphi_{\text{入,出}}}}\exp\left\{i\int\mathscr{L}(x)\,dx\right\}\prod_x\delta(\mathscr{A}_0)\,d\mathscr{A}\,d\bar{\psi}\,d\psi,\qquad(4.12)$$

并在这一积分上进行§3.3中描述的变换：

(1) 对$\mathscr{F}_{k0}$积分.

(2) 利用公式

$$\delta(\mathscr{A}_0)\,d\mathscr{A}_\mu\to\Delta_L(\mathscr{A})\,\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu+a)\,d\mathscr{A}_\mu\qquad(4.13)$$

过渡到广义洛仑兹规范

$$\Phi_L=\partial_\mu\mathscr{A}_\mu(x)+a(x)=0.$$

(3) 用高斯型权重$\exp\{-(i/4\alpha)\mathrm{tr}\int a^2(x)\,dx\}$对辅助函数$a(x)$积分.

这样就会得到α规范中S矩阵和格林函数生成泛函的表达式，它和(3.54)、(3.56)式的差别仅仅在于在拉格朗日函数和带源的项中出现场$\bar{\psi}$、ψ.

除了已经引入的基本元素$G_{\mu\nu}$、G、$V_{\mathscr{A}^3}$、$V_{\mathscr{A}^4}$、$V_{c\bar{c}\mathscr{A}}$以外，图形规则中还包含旋量线

$$p\;\text{———}\;=S=\frac{m+p_\mu\gamma_\mu}{m^2-p^2-i0}\qquad(4.14)$$

和顶点

$$= V_{\bar{\psi}\psi\mathscr{A}} = g\gamma_\mu T(t_a). \tag{4.15}$$

由于已经指出的对费米场积分的特殊性质，每个费米圈给出附加因子(-1)。在约化公式中，入射粒子的旋量腿乘上因子

$$(2\pi)^{-3/2}\bar{u}_i(\gamma_\mu k_\mu - m)\theta(-k_0),$$

出射粒子旋量腿乘上因子

$$(2\pi)^{-3/2}(\gamma_\mu k_\mu - m)u_i\theta(k_0).$$

对于反粒子，u_i 应换成 v_i，而 $\theta(k_0)$ 换成 $\theta(-k_0)$。

要考查的第二个例子是有自发破缺对称性的模型。选择 $SU(2)$ 群作为规范群，并令 φ 为同位旋量表示

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad \varphi^+ = (\varphi_1^*, \varphi_2^*) \tag{4.16}$$

中的标量场。第一章(3.25)式的拉格朗日函数改写成一阶形式：

$$\begin{aligned} \mathscr{L} = {} & \mathscr{L}_{YM}(\mathscr{A}_\mu, \mathscr{F}_{\mu\nu}) + \varphi_\mu^+ \nabla_\mu \varphi + (\nabla_\mu \varphi)^+ \varphi_\mu - \varphi_\mu^+ \varphi_\mu \\ & - \lambda(\varphi^+ \varphi - \mu^2)^2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

其中引入了辅助矢量场 $\varphi_\mu, \varphi_\mu^+$ 和

$$\nabla_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + \frac{ig}{2} A_\mu^a \tau^a \varphi, \tag{4.18}$$

τ^a 是泡利矩阵。

正象真空中的杨-米尔斯场情况一样，运动方程使我们能消掉一部分变量：

$$\mathscr{F}_{ik} = \partial_k \mathscr{A}_i - \partial_i \mathscr{A}_k + g[\mathscr{A}_i, \mathscr{A}_k]; \tag{4.19}$$

$$\varphi_k = \nabla_k \varphi. \tag{4.20}$$

这样，拉格朗日函数具有广义哈密顿系统的特征形式

$$\mathscr{L} = F^a_{0k}\partial_0 A^a_k + \varphi^+_0\partial_0\varphi + \partial_0\varphi^+\varphi_0 - h(\mathscr{F}_{0k}, \mathscr{A}_k, \varphi_0, \varphi)$$
$$+ A^a_0(\partial_k F^a_{0k} - g\varepsilon^{abc}A^b_k F^c_{0k} + \frac{ig}{2}(\varphi^+_0\tau^a\varphi - \varphi^+\tau^a\varphi_0)) \quad (4.21)$$

其中 h 是哈密顿量，它的明显形式我们不写出来。

我们看到，两对变量 F^a_{0k}，A^a_k 和 φ_0，φ 起着共轭正则变量的作用，A^a_0 是拉格朗日乘子，而

$$C^a = -\partial_k F^a_{0k} + g\varepsilon^{abc}A^b_k F^c_{0k} + \frac{ig}{2}(\varphi^+_0\tau^a\varphi - \varphi^+\tau^a\varphi_0) \quad (4.22)$$

是约束。容易验证，象(2.10)式那样的对易条件是满足的，因而能够应用 §3.2 中的普通公式将这一模型量子化。

正如第一章所指出，场

$$A^a_\mu = 0; \quad \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

对应于稳定的真空位形。因此，方便的办法是在进行量子化之前作一个移动

$$\varphi \to \varphi - \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

作这样一个移动的结果，(4.22)式成为

$$C^a = -\partial_k F^a_{0k} + g\varepsilon^{abc}A^b_k F^c_{0k} + m_1 B^a_0 + \frac{1}{2}$$
$$\times g(\sigma B^a_0 - B^a\sigma_0 - \varepsilon^{abc}B^b B^c_0), \quad (4.25)$$

其中按下式引入了符号 B^a 和 σ：

$$\varphi^1 = \frac{iB^1 + B^2}{\sqrt{2}}; \varphi^2 = \mu + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - iB^3), m_1 = \frac{\mu g}{\sqrt{2}}, \quad (4.26)$$

而 B^a_0 和 σ_0 是相应的正则动量。

我们看到，约束线性地包含项 B^a_0，因此，选择

$$B^a = 0 \quad (4.27)$$

作为附加条件(它也是规范条件)是很自然的，实际上，泊松括号的矩阵[注]

[注] 原书下式中的 δ 函数为 $\delta(x-y)$。——译者

$$\{C^a(x), B^b(y)\} = (m_1 + \frac{g}{2}\sigma(x))\delta^{ab}\delta(\vec{x}-\vec{y}) + \cdots, \qquad (4.28)$$

("…" 表示在 $B^a=0$ 时为零的项)在微扰论范围内，也就是说在 $|g\sigma| \ll m_1$ 时，是不退化的。

在 $B^a=0$ 的规范中，哈密顿量 h 的二次型和约束 C 的线性型有如下形式：

$$h_0 = \frac{1}{2}(F^a_{0k})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i A^a_k - \partial_k A^a_i)^2 + \frac{m_1^2}{2}(A^a_k)^2 + \frac{1}{2}(B^a_0)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\sigma_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_k\sigma)^2 + \frac{m_2^2}{2}\sigma^2, \quad m_2 = 2\lambda\mu, \qquad (4.29)$$

$$C^a_0 = -\partial_k F^a_{0k} + m_1 B^a_0. \qquad (4.30)$$

我们选择将约束方程 $C_0=0$ 的解代入 h 中得到的表达式

$$h_0^* = \frac{1}{2}(F^a_{0k})^2 + \frac{1}{2m_1^2}(\partial_k F^a_{0k})^2 + \frac{1}{4}(\partial_i A^a_k - \partial_k A^a_i)^2$$

$$+ \frac{m_1^2}{2}(A^a_k)^2 + \frac{1}{2}\sigma_0^2 + \frac{1}{2}(\partial_k\sigma)^2 + \frac{m_2^2}{2}\sigma^2 \qquad (4.31)$$

作为在微扰论范围内决定粒子谱的自由哈密顿量。表达式 $\int h_0^* d^3x$ 通过下述代换

$$A^b_l(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\sum_{i=1}^{3}\int\Big[e^{i\vec{k}\vec{x}}a^b_i(\vec{k})e^i_l(\vec{k})$$

$$+ e^{-i\vec{k}\vec{x}}a^{*b}_i(\vec{k})e^i_l(-\vec{k})\Big]\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}; \qquad (4.32)$$

$$F^b_{0l}(\vec{x}) = (2\pi)^{-3/2}\sum_{i=1}^{3}\int\Big[e^{i\vec{k}\vec{x}}a^b_i(\vec{k})\tilde{e}^i_l(\vec{k})$$

$$- e^{i\vec{k}\vec{x}}a^{*b}_i(\vec{k})\tilde{e}^i_l(-\vec{k})\Big]\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_1}{2}}d^3k \qquad (4.33)$$

(其中，$e^1_l = \tilde{e}^1_l$；$e^2_l = \tilde{e}^2_l$ 是垂直于矢量 $\vec{k}$ 的任意两个正交归一矢量，而对于矢量场

$$e^3_l = \frac{k_l}{|\vec{k}|}\frac{\omega_1}{m_1}; \quad \tilde{e}^3_l = \frac{k_l}{|\vec{k}|}\frac{m_1}{\omega_1}, \quad \omega_1 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_1^2}.) \qquad (4.34)$$

以及标量场σ的标准代换而对角化．其结果，自由哈密顿量成为[注]

$$\int h_0^* d^3x = \int d^3k\left(\sum_{i=1}^{3} a_i^{*b} a_i^b \omega_1 + a_\sigma^* a_\sigma \omega_2\right),\quad \omega_2 = \sqrt{\vec{k}^2 + m_2^2}. \qquad (4.35)$$

从以上计算可见，粒子谱包含三个有质量的矢量粒子和一个有质量的标量粒子．

现在可以来讨论S矩阵．在广义哈密顿描述中，用路径积分表示的S矩阵的核的表达式可以写成

$$\begin{aligned} S = \lim_{\substack{t''\to\infty \\ t'\to-\infty}} \int \exp\Big\{ & -\frac{1}{2}\int d^3k\Big(\sum_{i=1}^{3}(a_i^{*b}(\vec{k},t'')\,a_i^b(\vec{k},t'') \\ & + a_i^{*b}(\vec{k},t')a_i^b(\vec{k},t')) + a_\sigma^*(\vec{k},t'')a_\sigma(\vec{k},t'') \\ & + a_\sigma^*(\vec{k},t')\,a_\sigma(\vec{k},t')\Big) \\ & + i\int d^3x\int_{t'}^{t''} dt\Big(\frac{1}{2}(F_{0k}^a \dot{A}_k^a - \dot{F}_{0k}^a A_k^a + \sigma_0\dot{\sigma} - \dot{\sigma}_0\sigma) \\ & - h(\mathscr{F}_{0k}, \mathscr{A}_k, B_0, B, \sigma_0, \sigma) + A_0^a C^a\Big)\Big\} \prod_x \sigma(B^a)\left(m_1 + \frac{g\sigma}{2}\right)^3 \\ & \times \prod_x d\mathscr{F}_{0k} d\mathscr{A}_k d\sigma_0 d\sigma dB_0 dB d\mathscr{A}_0, \end{aligned} \qquad (4.36)$$

$$a_i^{*b}(\vec{k},t'') = a_i^{*b}(\vec{k})e^{i\omega_1 t''},\; a_i^b(\vec{k},t') = a_i^b(\vec{k})e^{-i\omega_1 t'}, \qquad (4.37)$$

$$a_\sigma^*(\vec{k},t'') = a_\sigma^*(\vec{k})e^{i\omega_2 t''},\; a_\sigma = (\vec{k},t') = a_\sigma(\vec{k})e^{-i\omega_2 t'}. \qquad (4.38)$$

这里，变量$a_i^*(\vec{k},t)$，$a_i^{*b}(\vec{k},t)$按照类似于(4.32)、(4.33)式的规律和$A_k^b(\vec{x},t)$、$F_{0k}^b(\vec{x},t)$相联系：

$$\begin{aligned} A_l^b(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{i=1}^{3}\Big[& a_i^b(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}e_l^i(\vec{k}) \\ & + a_i^{*b}(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}}e_l^i(-\vec{k})\Big]\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}, \end{aligned} \qquad (4.39)$$

[注] 原书在(4.37)式中用a_i^{*b}，而在其它各式中均用a_i^{b*}，现统一为a_i^{*b}．
——译者

$$F^b_{0l}(\vec{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\sum_{i=1}^{3}\Big[a^b_l(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}\varepsilon^i_l(\vec{k})$$

$$-a^{*b}_i(\vec{k},t)\,e^{-i\vec{k}\vec{x}}\varepsilon^i_l(-\vec{k})\Big]\frac{1}{i}\sqrt{\frac{\omega_1}{2}}d^3k. \qquad (4.40)$$

让我们象在§2.3中对标量场做过的那样，将(4.36)式转化为明显相对论不变的形式。为此，应对变量B、σ_0、B_0和$\mathscr{F}_{0k}$积分，并过渡到极限$t''\to\infty$、$t'\to-\infty$。对σ_0的积分以及有关的变换与已经考虑过的标量场情况毫无差别，因此我们不重复它。对变量B_0的积分在平移

$$B^a_0\to B^a_0-m_1A^a_0 \qquad (4.41)$$

以后完成。这一平移将变量B_0和其它变量分离开。函数$B_0(x)$和$\mathscr{A}_0(x)$不进入边界条件，因此对B_0的积分只不过改变归一化因子。平移(4.41)式的结果使得一个形式为$(m_1^2/2)A^{a2}_0$的质量项加到了作用量上。对B^a的积分[注]从(4.36)式中去掉了δ函数。为了对$\mathscr{F}_{0k}$积分，需要作平移

$$F^a_{0k}=F^{a(1)}_{0k}+\partial_0A^a_k-\partial_kA^a_0. \qquad (4.42)$$

进行分部积分可以证明，通过已经进行的变换，由(4.36)式得到的新变量下作用量的二次型有如下形式：

$$-\frac{1}{2}\int A^a_kF^a_{0k}d^3x\,\Big|_{t'}^{t''}+\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\Big[\frac{1}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2$$

$$+\frac{m_1^2}{2}(A^a_\mu)^2-\frac{1}{2}(F^{a(1)}_{0k})^2\Big]. \qquad (4.43)$$

现在，让我们进行变量$\mathscr{A}_\mu$的平移：

$$A^a_\mu=A^{a(0)}_\mu+A^{a(1)}_\mu, \qquad (4.44)$$

其中$\mathscr{A}^{(0)}_\mu$是由(4.43)式产生的自由场运动方程。

$$(\Box_{\mu\nu}+m_1^2g_{\mu\nu})\mathscr{A}^{(0)}_\nu=0;\quad \Box_{\mu\nu}=\Box g_{\mu\nu}-\partial_\mu\partial_\nu \qquad (4.45)$$

的解，它可以写成

[注] 原书中为B_k。——译者

$$A_{\mu}^{b(0)}=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\left[a_i^b(\vec{k})e^{-ikx}u_{\mu}^i(\vec{k})+a_i^{*b}(\vec{k})e^{ikx}u_{\mu}^i(-\vec{k})\right]\Bigg|_{k_0=\omega_1}$$

$$\times\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}. \tag{4.46}$$

其中,

$$u_{\mu}^i=(0,e_k^i),i=1,2;\ u_{\mu}^3=(i\frac{|\vec{k}|}{m},e_k^3), \tag{4.47}$$

而矢量 $e_k^i,i=1,2$ 是(4.32)式中引入的矢量. 注意, $\mathscr{A}_{\mu}^{(0)}$ 满足方程(4.45)的所有的解都必须满足的关系

$$\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\mu}^{(0)}=0. \tag{4.48}$$

通过分部积分, 可以从作用量(4.43)式中完全消去 $\mathscr{A}_{\mu}^{(0)}$,其结果使它成为

$$\int d^3x\left[(\partial_0A_k^{a(0)}-\partial_kA_0^{a(0)})(A_k^a-\frac{1}{2}A_k^{a(0)})-\frac{1}{2}F_{0k}^aA_k^a\right]\Bigg|_{t'}^{t''}$$

$$+\int_{t'}^{t''}dt\int d^3x\left[-\frac{1}{2}(F_{0k}^{a(1)})+\frac{1}{4}(\partial_{\mu}A_{\nu}^{a(1)}-\partial_{\nu}A_{\mu}^{a(1)})^2\right.$$

$$\left.+\frac{m_1^2}{2}(A_{\mu}^{a(1)})^2\right]. \tag{4.49}$$

积分出来的项可以用变量 $a_i^b(k),a_i^{*b}(k)$ 表出, 其结果, (4.49)式的第一项可以写成类似于第二章(3.40)式的形式:

$$\frac{1}{i}\int d^3k\left\{a_i^{*b}(\vec{k})a_i^b(\vec{k})-\frac{1}{2}\left[a_i^{*b}(\vec{k},t'')a_i^b(\vec{k},t'')\right.\right.$$

$$\left.+a_i^{*b}(\vec{k},t')a_i^b(\vec{k},t')\right]-(a_i^{*b}(\vec{k},t')-a_i^{*b}(\vec{k})e^{i\omega_1t'})^2$$

$$\left.-(a_i^b(\vec{k},t'')-a_i^b(\vec{k})e^{-i\omega_1t''})^2\right\}. \tag{4.50}$$

(4.49)式中的第二项在 $t'\to-\infty,t''\to\infty$ 的极限下保持有限,只要

$$A_0^b(\vec{x},t)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(a_3^b(\vec{k},t)e^{i\vec{k}\vec{x}}+a_3^{*b}(\vec{k},t)e^{-i\vec{k}\vec{x}})\,i\frac{|\vec{k}|}{m_1}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}$$

$$+A_0^{b(1)}(\vec{x},t), \tag{4.51}$$

其中，$A_0^{b(1)}$和 $F_{0k}^{b(1)}$一样，都是下降快的函数. 关系式 (4.42) 与 $A_0^{b(1)}$、$F_{0k}^{b(1)}$的下降以及边界条件(4.37)、(4.38)式是相容的，如果[注]

$$\left.\begin{aligned} a_i^{*b}(\vec{k},t') &= e^{i\omega_1 t'}a_{i入}^{*b}(\vec{k}) + a_{i1}^{*b}(\vec{k},t'), t'\to-\infty, \\ a_i^b(\vec{k},t'') &= e^{-i\omega_1 t''}a_{i出}^b(\vec{k}) + a_{i1}^b(\vec{k},t''), t''\to\infty, \end{aligned}\right\} \tag{4.52}$$

其中，$a_{i1}^{*b}(\vec{k},t')$ 在 $t'\to-\infty$ 时下降快，而$a_{i1}^b(\vec{k},t'')$ 在 $t''\to\infty$ 时下降快.

综合以上结果，我们看到，如果积分变量的渐近行为有如自由方程(4.45)的解：

$$A_\mu^a(\vec{x},t) = A_{\mu\,\substack{入\\出}}^a(\vec{x},t) + A_{\mu\,\substack{入\\出}}^{a(1)}(\vec{x},t), \tag{4.53}$$

其中，$A_{\mu入}^{a(1)}$、$A_{\mu出}^{a(1)}$分别在 $t\to-\infty$和 $t\to+\infty$ 时下降快，而 $A_{\mu入}^a$ 和 $A_{\mu出}^a$可表示为如下形式：

$$A_{\mu\,\substack{入\\出}}^b = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int[a_{i\,\substack{入\\出}}^b(\vec{k})e^{-ikx}u_\mu(\vec{k}) + a_{i\,\substack{入\\出}}^{*b}(\vec{k})e^{ikx}u_\mu(-\vec{k})|_{k_0=\omega_1}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_1}}, \tag{4.54}$$

其中，

$$a_{i入}^b(\vec{k}) = a_i^b(\vec{k});\quad a_{i出}^{*b}(\vec{k}) = a_i^{*b}(\vec{k}), \tag{4.55}$$

则在(4.36)式中就可以过渡到 $t''\to\infty$，$t'\to-\infty$的极限. 在函数$a_{i出}^b(\vec{k})$和$a_{i入}^{*b}(\vec{k})$上不加什么条件.

由(4.54)、(4.55)和(4.46)式可见，$A_\mu^{a(1)} = A_\mu^a - A_\mu^{a(0)}$满足费曼边界条件，那就是说 $A_\mu^{a(1)}$在 $t\to-\infty$ 时不包含入射波，在 $t\to\infty$ 时不包含出射波. 当作用在这样的函数上时，(4.49) 式中的二次型单值地确定为出现在方程(4.45)式中的算符

$$\Box_{\mu\nu} + m_1^2 g_{\mu\nu} \tag{4.56}$$

的二次型.

[注] 原书以下第一式指数中为$i\omega_1 t$. ——译者

(4.36)式的进一步变换，完全按照第2.3节中的讨论进行. 其结果，得到S矩阵的正规符号的明显相对论不变的最终表达式

$$S(\mathscr{A}_\mu^{(0)},\sigma^{(0)})=\int_{\substack{A\to A_{\text{入,出}}\\ \sigma\to\sigma_{\text{入,出}}}}\exp\{i\int\mathscr{L}(x)dx\}\prod_x(m_1+\frac{g}{2}\sigma)^3 d\mathscr{A}_\mu d\sigma, \tag{4.57}$$

其中，

$$\mathscr{L}=-\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu^a-\partial_\mu A_\nu^a+g\varepsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c)^2+\frac{m_1^2}{2}A_\mu^2$$
$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\,\partial_\mu\sigma-\frac{m_2^2}{2}\sigma^2+\frac{m_1 g}{2}\sigma A_\mu^2+\frac{g^2}{8}\sigma^2 A_\mu^2$$
$$-\frac{gm_2}{4m_1}\sigma^3-\frac{g^2 m_2^2}{32m_1^2}\sigma^4. \tag{4.58}$$

场σ的渐近条件有类似于第二章(3.47)式的形式：

$$\sigma_{\substack{\text{入}\\ \text{出}}}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int(a_{\sigma\substack{\text{入}\\ \text{出}}}(\vec{k})e^{-ikx}+a^*_{\sigma\substack{\text{入}\\ \text{出}}}(\vec{k})e^{ikx}|_{k_0=\omega_2}\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_2}}, \tag{4.59}$$

其中，$a^*_{\sigma\text{出}}(\vec{k})=a^*_\sigma(\vec{k})$；$a_{\sigma\text{入}}(\vec{k})=a_\sigma(\vec{k})$. 场$A_\mu^b$的渐近条件由(4.54)、(4.55)式给出.

作用量$\int\mathscr{L}(x)dx$中的二次型定义为

$$\frac{1}{2}\int(\mathscr{A}_\mu-\mathscr{A}_\mu^{(0)})(\Box_{\mu\nu}+g_{\mu\nu}m_1^2)(\mathscr{A}_\mu-\mathscr{A}_\mu^{(0)}), \tag{4.60}$$

其中，对算符$(\Box_{\mu\nu}+m_1^2 g_{\mu\nu})$要加上费曼边界条件. 格林函数的生成泛函

$$Z(J,\eta)=\int\exp\left\{i\int(\mathscr{L}(x)+J_\mu^a A_\mu^a+\sigma\eta)dx\right\}$$
$$\times\prod_x(m_1+\frac{g}{2}\sigma)^3 d\mathscr{A}_\mu d\sigma \tag{4.61}$$

和由它得到的微论图形规则包含一些新特点. 第一，(4.51)式矢量场的传播子可改写为

$$D_{\mu\nu}^c(x-y)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ik(x-y)}(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{m_1^2})\frac{1}{k^2-m_1^2+i0}d^4k, \tag{4.62}$$

它比我们迄今为止遇到过的格林函数在 $x \sim y$ 时有更高的奇异性. 它的纵向部分

$$\frac{k_\mu k_\nu}{m_1^2} \frac{1}{k^2 - m_1^2 + i0} \tag{4.63}$$

在 k 大时不下降，因而它对传播子的贡献有 $\delta^4(x)$ 的奇异性. 其次，积分测度包含局域因子 $\det M_\Phi$. 它可以形式地写为

$$\det M_\Phi = \prod_x (m_1 + \frac{g}{2}\sigma(x))^3 = \text{const}\cdot\exp\left\{V\int \ln(m_1 + \frac{g\sigma(x)}{2})^3\right\}dx$$

$$= \text{const}\cdot\exp\left\{\delta^4(0)\left[-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\int\left(\frac{g\delta(\alpha)}{2m_1}\right)^n dx\right]\right\}, \tag{4.64}$$

$$V = \int dx = \delta^4(0).$$

在微扰论中，作用量的这样一个附加项产生新的图形，其贡献正比于 $\delta^4(0)$的方次(自然，这一表达式应在一定的体积正规化的意义下理解). 这些图形所起的作用是和微扰论中其它图形的奇异部分相抵销；这些奇异部分是将矢量粒子的 δ 型贡献乘到格林函数上去时产生的.

以上提出的(4.58)式的图形规则的两个特点表明它包含有不方便的奇异性. 因此，更方便的是在洛仑兹规范或 α 规范下来研究这一模型，这些规范可以用已经熟悉的方法简单地引进来. 以上考虑的规范（常称为么正规范）的作用在于，它给出了粒子谱，而且模型的渐近态明显地相对论不变. 从这个意义上说，它代替了真空中杨-米尔斯理论的库仑规范.

我们不再描述向 α 规范过渡的步骤；这不要求任何新的思想，因为场 $\partial_\mu A_\mu^a$[注1]并不传播. S 矩阵的正规符号由下述路径积分给出[注2]：

[注1] 原书中为$\partial_\mu A_\mu$. ——译者

[注2] 原书下式中为$d_\mu A$. ——译者

$$S=N^{-1}\int\limits_{\substack{A\to A_{\text{入,出}}\\ \sigma\to\sigma_{\text{入,出}}}}\exp\left\{i\int\left(\mathscr{L}(x)+\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)^2\right)dx\right\}$$

$$\times\det M_\alpha\prod_x d\mathscr{A}_\mu d\mathscr{B}d\sigma,\tag{4.65}$$

其中，

$$\mathscr{L}(x)=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^aF_{\mu\nu}^a+\frac{m_1^2}{2}A_\mu^{a2}+m_1A_\mu^a\partial_\mu B^a+\frac{1}{2}\partial_\mu B^a\partial_\mu B^a$$

$$+\frac{1}{2}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma-\frac{m_2^2}{2}\sigma^2+\frac{g}{2}A_\mu^a(\sigma\partial_\mu B^a-B^a\partial_\mu\sigma-\varepsilon^{abc}B^b\partial_\mu B^c)$$

$$+\frac{m_1g}{2}\sigma A_\mu^{a2}+\frac{g^2}{8}(\sigma^2+B^2)A_\mu^{a2}-\frac{gm_2^2}{4m_1}\sigma(\sigma^2+B)$$

$$-\frac{g^2m_2^2}{32m_1^2}(\sigma^2+B^2)^2,\tag{4.66}$$

而

$$M_\alpha u=Mu=\square u-g\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,u],\tag{4.67}$$

A_μ^a 和 σ 的渐近条件和以前一样．场 $\partial_\mu A_\mu^a$、B^a 和在 $\det M$ 的定义中出现的虚构粒子 $\bar{c}^a$、c^a 不传播．在建立图形规则中，方便的（但不是必要的）办法是对它们采用费曼边界条件．格林函数的生成泛函用标准方法由(4.65)式得到．

由于出现混合的传播子，在广义 α 规范中的图形规则有些繁琐．在计算时采用 $\alpha=0$ 的洛仑兹规范更方便．在这一规范中的图形规则有如下元素：

1．和矢量粒子线对应的传播子

$$\mu,a\;\sim\!\!\sim\!\!\overset{k}{\sim}\!\!\sim\!\!\sim\;b,\nu\quad=\delta^{ab}\left[\frac{g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu k^{-2}}{k^2-m_1^2+io}\right].\tag{4.68}$$

2．虚构粒子 $\bar{c}$，c 的传播子以及它们和矢量粒子相互作用的顶点同真空中的杨-米尔斯理论一样．

3．和标量粒子 B^a 和 σ 相对应有传播子：

$$\underline{a}\ \cdot\ \underline{\quad k\quad}\ \cdot\ \underline{b} \quad = \frac{\delta^{ab}}{k^2 + i0}, \tag{4.69}$$

$$\underline{\quad}\ \cdot\ \underline{\quad k\quad}\ \cdot\ \underline{\quad} \quad = \frac{1}{k^2 - m_2^2 + i0}. \tag{4.70}$$

4．存在着场 $\mathscr{A}_\mu$、$\mathscr{B}$ 和 σ 相互作用的大量顶点，它们很容易按(4.66)式写出。

约化公式有通常的形式，我们用文字描述它．只需要取矢量粒子和场 σ 的粒子作为格林函数的外腿．对应于矢量粒子的每条腿乘上$(k_j^2 - m_1^2)$ 和极化矢量 $u_\mu^i(\vec{k}_j)$．对应于场 σ 的每条腿上乘以$(p_l^2 - m_2^2)$．然后过渡到质壳上：$k_j^2 = m_1^2$，$p_l^2 = m_2^2$，假定对出射粒子 k_0 和 p_0 是正的，而对入射粒子 k_0 和 p_0 是负的．

如果选择表达式

$$\exp\left\{\frac{i}{2\alpha}\int(\partial_\mu A_\mu^a - \alpha m_1 B^a)^2 dx\right\} \tag{4.71}$$

作为(3.42)式中消除退化的泛函B^a，就可以得到图形规则的另一方案．和得到 α 规范中 S 矩阵表达式完全同样的计算，导致下面的结果[注]：

$$S = N^{-1}\int_{\substack{A \to A_{入,出}\\ \sigma\to\sigma_{入,出}}} \exp\left\{ i\int\left[\mathscr{L}(x) + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a - \alpha m_1 B^a)^2\right]dx\right\}$$

$$\times \prod_x \det M_X d\mathscr{A}_\mu d\mathscr{B} d\sigma, \tag{4.72}$$

其中，拉格朗日$\mathscr{L}$和以前一样由(4.66)式给出，而算符M_X有如下形式：

$$M_X u = (\Box + \alpha m_1^2)u - g\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu, u] + \frac{\alpha g m_1}{2}[\mathscr{B}, u]$$

$$+ \frac{\alpha m_1 g}{2}\sigma u. \tag{4.73}$$

[注] 原书下式中为 $dA_\mu dB$．——译者

和前面一样，det M_X 可以表达为对虚拟粒子场的积分：

$$\det M_X=\int\exp\left\{i\int\bar{c}^a(x)M_X^{ab}c^b(x)dx\right\}\prod_x d\bar{c}dc. \tag{4.74}$$

在(4.66)式中对场$\mathscr{A}_\mu$、$\mathscr{B}$[注1] 非对角的项 $m_1A_\mu^a\partial_\mu B^a$ 和固定规范的表达式中的类似项消去. 其结果，混合传播子 $\widehat{A_\mu^aB^b}$ 不再存在. 费曼规则在以下几点上和前述的不同：

1. 对应于矢量线的传播子是

$$-\delta^{ab}\left[\frac{g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu k^{-2}}{k^2-m_1^2+i0}+\frac{k_\mu k_\nu k^{-2}}{(k^2\alpha^{-1}-m_1^2+i0)}\right]. \tag{4.75}$$

2. 对应于标量$\mathscr{B}$线[注2] 的传播子是

$$\frac{\delta^{ab}}{p^2-m_1^2\alpha+i0}, \tag{4.76}$$

3. 对应于虚拟粒子的传播子是

$$-\frac{\delta^{ab}}{p^2-m_1^2\alpha+i0}. \tag{4.77}$$

4. 出现了附加的虚拟粒子和场 B^a 以及 σ 相互作用的顶点，它们的明显形式很容易从（4.73）和（4.74）式推出.

在 $\alpha=0$ 时，这些规则显然和前面导出过的洛仑兹规范的规则一样.

在这里，我们结束了关于杨-米尔斯场和物质场相互作用的例子的讨论. 我们希望这些例子足够典型，而读者将能够毫不困难地为任何具有或不具有对称性破缺的模型建立图形规则.

[注1] 原书中为$\boldsymbol{A}_\mu$, $\boldsymbol{B}$. ——译者

[注2] 原书中为"$\boldsymbol{B}$线". ——译者

第四章　规范理论的重整化

§4.1　最简单图形的例子

上一章中阐明的图形方法使得我们能够计算格林函数和散射几率，精确到 g 的任意方次．然而，直接应用以上建立的规则去计算包含封闭圈的图，会得到无意义的结果——相应的积分在大动量下发散．本章将要研究的重整化步骤的实质就是要给这种发散的表达式赋予一定的意义．

作为最简单的例子，我们来考虑 $SU(2)$ 规范群的杨-米尔斯理论中一个虚构粒子的格林函数的二级修正．这一修正由图 1 描述．相应的解析表达式为

$$-\frac{g^2}{k^2+i0}\Sigma(k^2)\frac{1}{k^2+i0},\tag{1.1}$$

在对角 α 规范（$\alpha=1$）中

$$\Sigma(k^2)=-\frac{i2k_\nu g_{\mu\nu}}{(2\pi)^4}\int\frac{dp(k-p)_\mu}{(p^2+i0)[(k-p)^2+i0]}.\tag{1.2}$$

当 $p\to\infty$时这一积分线性发散．为了给（1.2）式以意义，我们首先引进一个中间的正规化，将函数 $(p^2+i0)^{-1}$ 用正规化的表达式

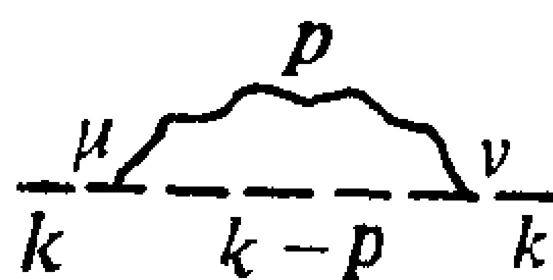


图1　一个虚构粒子的格林函数的二级修正．虚线表示这一虚构粒子的传播子，波线是杨-米尔斯场的传播子．

$$\frac{1}{(p^2+i0)}\longrightarrow\frac{1}{(p^2+i0)}-\frac{1}{p^2-\Lambda^2+i0}$$

$$=-\int_0^{\Lambda^2}\frac{d\lambda}{(p^2-\lambda+i0)^2}\tag{1.3}$$

代替．当$\Lambda \to \infty$时，正规化的格林函数趋向原先的表达式$(p^2+i0)^{-1}$.
对有限的Λ，积分

$$\Sigma_\Lambda(k^2)=\frac{2i\boldsymbol{k}_\nu}{(2\pi)^4}\int_0^{\Lambda^2}d\lambda\int\frac{d\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})_\nu}{[p^2-\lambda+i0]^2[(k-p)^2+i0]} \tag{1.4}$$

收敛．为了计算它，我们用费曼的公式

$$\frac{1}{a^2b}=\int_0^1\frac{2\boldsymbol{z}d\boldsymbol{z}}{[az+b(1-z)]^3}. \tag{1.5}$$

这一公式使我们能将（1.4）式的分母中的两个因子合并成一个：

$$\Sigma_\Lambda(k^2)=\frac{2i\boldsymbol{k}_\nu}{(2\pi)^4}\int_0^{\Lambda^2}d\lambda\int_0^1 dz2z$$

$$\times\int\frac{d\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})_\nu}{[(p^2-\lambda+i0)z+(k^2-2pk+p^2+i0)(1-z)]^3}. \tag{1.6}$$

过渡到新变量

$$p\longrightarrow p+k(1-z), \tag{1.7}$$

我们得到

$$\Sigma_\Lambda(k^2)=\frac{2i\boldsymbol{k}_\nu}{(2\pi)^4}\int_0^{\Lambda^2}d\lambda\int_0^1 dz2z$$

$$\times\int\frac{d\boldsymbol{p}(\boldsymbol{kz}-\boldsymbol{p})_\nu}{[p^2+k^2(1-z)z-\lambda z+i0]^3}. \tag{1.8}$$

由于对称性，积分

$$\int dpp_\nu f(p^2) \tag{1.9}$$

等于零．

在剩下的积分中，可以将对p_0的积分路径旋转90°，并引进新变量$p_0\to i\boldsymbol{p}_0$。其结果，对$\boldsymbol{p}$的积分成为

$$\mathrm{I}=-i\int\frac{d\boldsymbol{p}}{(p^2+c)^3}, \tag{1.10}$$

其中积分是对四维欧几里得空间进行的．计算（1.10）式中的积分，得到

$$\mathrm{I}=-\frac{i\pi^2}{2c}. \tag{1.11}$$

结果得到函数 $\sum_\Lambda(k^2)$ 的下述表达式：

$$\Sigma_\Lambda(k^2) = -\frac{k^2}{16\pi^2}\int_0^{\Lambda^2} d\lambda \int_0^1 dz \frac{2z^2}{k^2(1-z)z-\lambda z}. \qquad (1.12)$$

对 λ 的积分可以明显求出．在 $k^2<0$ 时，得到

$$\Sigma_\Lambda(k^2) = \frac{2k^2}{16\pi^2}\int_0^1 dz\cdot z\ln\frac{k^2(1-z)z-\Lambda^2 z}{k^2(1-z)z}; \quad (k^2<0). \qquad (1.13)$$

在 $\Lambda\to\infty$ 时，这一表达式正像所期待的那样为对数发散．重整化步骤就是从（1.13）式的积分中减去泰勒级数展开的一个或更多个（在这一情况下是一个）带头项，并用所得的表达式来代替这一积分．

将被积函数在 $k^2=\chi$ 点的周围展开，得到

$$\Sigma_\Lambda(k^2) = \frac{2k^2}{16\pi^2}\left\{\int_0^1 zdz\ln\frac{x(1-z)z-\Lambda^2 z}{x(1-z)z} + \int_0^1 zdz\left[\ln\frac{k^2(1-z)z-\Lambda^2 z}{x(1-z)z-\Lambda^2 z} - \ln\frac{k^2(1-z)z}{x(1-z)z}\right]\right\}. \qquad (1.14)$$

在 $\Lambda\to\infty$ 时，第二项和第三项趋于有限的极限

$$\Sigma_R(k^2) = -\frac{k^2}{16\pi^2}\ln\frac{k^2}{x}. \qquad (1.15)$$

第一项在 $\Lambda\to\infty$ 时没有极限，它的行为有如

$$-k^2 g^{-2}(1-\tilde{z}_2) = \frac{k^2}{16\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{-x}+\cdots\right). \qquad (1.16)$$

像（1.14）式这样的分解不是唯一可能的．选择和 x 不同的另一点作为展开的中心，可以得到 $\sum_R(k^2)$ 的另一个表达式，它和（1.15）式相差 k^2 的一个有限的多项式．这样，重整化格林函数到 g^2 二级的普遍表达式有以下形式

$$-\frac{1}{k^2+i0}\left(1+\tilde{z}_2-\frac{g^2}{16\pi^2}\ln\frac{k^2}{x}\right), \qquad (1.17)$$

其中 $\tilde{z}_2$ 是一个任意常数．

用（1.15）式代替（1.2）式与重新定义原始拉氏量等效．我们用下式来代替虚构粒子的拉氏量：

$$-\frac{\mathrm{tr}}{2}\bar{c}\partial_\mu\nabla_\mu c \longrightarrow -\frac{\mathrm{tr}}{2}\{\bar{c}\Box c - g\bar{c}\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu, c] + (\tilde{z}_2 - 1)\bar{c}\Box c\}, \tag{1.18}$$

其中，$\tilde{z}_2$ 由（1.16）式定义．因为最后一项～g^2，我们将它归入相互作用拉氏量．这样，在微扰展开式中，除了图 1 中的图形之外，还会出现一个新的图（图 2），其中的叉叉表示和“抵消项”$(\tilde{z}_2-1)\bar{c}\Box c$ 相应的顶点．

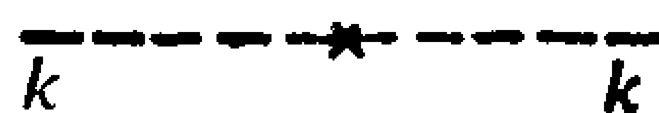


图 2

显然，对应于图1与图2之和的格林函数的修正由（1.17）式给出（令其中的$\tilde{b}_2=0$）．这个简单例子表明，减除泰勒展开式的带头项，与改变（即重整）原始拉氏量的参量（在这一情况下是虚构粒子波函数的归一化常数）等效．

再举一例来表明这一点．我们来计算对应于两个虚构粒子转变为一个矢量粒子的顶角函数 $\Gamma_{\bar{c}c\tilde{\mathscr{A}}\mu}$ 的三级修正．在 g 的三级对 $\Gamma_{\bar{c}c\tilde{\mathscr{A}}\mu}$ 有贡献的图画在图 3 上．

为简单起见，我们限于讨论零动量转移 $q=0$ 的情况．

积分

$$\boldsymbol{I}_a = -ig^3\varepsilon^{abc}\int\frac{d\boldsymbol{p}(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})_a(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})_\mu\boldsymbol{k}_\beta\boldsymbol{g}_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4(p^2+i0)[(k-p)^2+i0]^2}. \tag{1.19}$$

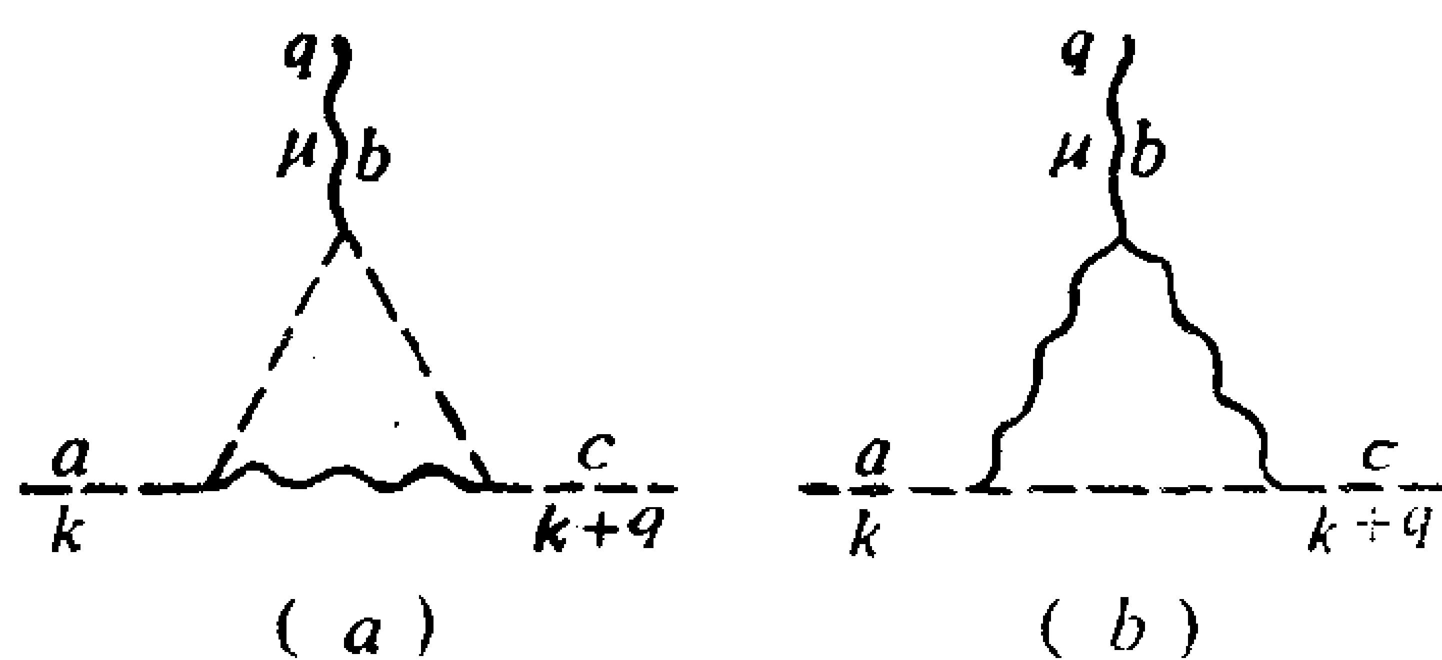


图3　对顶角函数 $\Gamma_{\bar{c}c\tilde{\mathscr{A}}}$ 的三级修正

对应于图 3 (a)．用（1.3）式引进中间正规化，并利用关系

$$\frac{1}{a^2b^2}=\int_0^1\frac{6z(1-z)dz}{[az+b(1-z)]^4},\tag{1.20}$$

可以将这一积分写成

$$I_a=-\frac{ig^3\varepsilon^{abc}k_\alpha}{(2\pi)^4}\int_0^1 dz\int_0^{\Lambda^2}d\lambda$$
$$\times\int dp\frac{(k-p)_\alpha(k-p)_\mu 6z(1-z)}{\{[p-k(1-z)]^2+k^2(1-z)z-\lambda z\}^4}.\tag{1.21}$$

利用变量代换(1.7)得到

$$I_a=-\frac{ig^3\varepsilon^{abc}k_\alpha}{(2\pi)^4}\int_0^1 dz\int_0^{\Lambda^2}d\lambda$$
$$\times\int dp\frac{(kz-p)_\alpha(kz-p)_\mu 6z(1-z)}{\{p^2+k^2(1-z)z-\lambda z\}^4}.\tag{1.22}$$

p 的奇次项由于对称性而没有贡献．由于同一原因

$$\int dp p_\mu p_\nu f(p^2)=\frac{1}{4}g_{\mu\nu}\int dp p^2 f(p^2).\tag{1.23}$$

过渡到欧几里得度规，并对 p 积分，得到[注]

$$I_a=-\frac{ig^3\varepsilon^{abc}k_\alpha}{(2\pi)^4}\left\{\int_0^1 dz\int_0^{\Lambda^2}d\lambda z^3(1-z)k_\alpha k_\mu\frac{i\pi^2}{\{k^2(1-z)z-\lambda z\}^2}\right.$$
$$\left.+g_{\alpha\mu}\int_0^1 dz\frac{i\pi^2 2}{4}z(1-z)\int_0^{\Lambda^2}d\lambda\frac{1}{\{k^2(1-z)z-\lambda z\}}\right\},\tag{1.24}$$

对 λ 积分给出

$$I_a=\frac{g^3}{16\pi^2}\varepsilon^{abc}k^2k_\mu\int_0^1\left\{\frac{1}{k^2(1-z)z-\Lambda^2 z}-\frac{1}{k^2(1-z)z}\right\}z^2(1-z)dz$$
$$+\frac{g^3}{32\pi^2}\varepsilon^{abc}k_\mu\int_0^1\ln\frac{k^2(1-z)z-\Lambda^2 z}{k^2(1-z)z}(1-z)dz\quad(k^2<0).\tag{1.25}$$

（1.25）式中的第一项在 $\Lambda\to\infty$ 时趋于有限的极限，而第二项对数发散．如二级图的情况一样，从第二个积分中减去泰勒级数展

[注] 原书下式第一个积分中为 $z^2(1-z)$，第二个积分中为 $(-i\pi)^2$ ——译者．

开式的头一项得到的表达式趋向一个确定的极限。在 $\Lambda\to\infty$ 时，I_a 可表示为

$$I_a=\frac{g^3\varepsilon^{abc}k_\mu}{64\pi^2}\left(b_\chi^1-\ln\frac{k^2}{\chi}\right)+\frac{g^3\varepsilon^{abc}k_\mu}{64\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-\chi}, \tag{1.26}$$

其中 b_χ^1 是一个有限的常数，它依赖于 χ 点的选择。

图 3 (b) 可以用完全相似的方式计算。相应的积分如下

$$I_b=-ig^3\varepsilon^{abc}$$
$$\times\int\frac{dp}{(2\pi)^4}\frac{(k-p)_\alpha k_\beta\{2p_\mu g_{\sigma\rho}-p_\sigma g_{\mu\rho}-p_\rho g_{\mu\sigma}\}g_{\alpha\sigma}g_{\rho\beta}}{[(k-p)^2+i0][p^2+i0]^2}. \tag{1.27}$$

重复以上的运算，当 $\Lambda\to\infty$ 时，得

$$I_b=\frac{g^3\varepsilon^{abc}k_\mu}{64\pi^2}\left(b_\chi^2-3\ln\frac{k^2}{\chi}\right)+\frac{3g^3\varepsilon^{abc}k_\mu}{64\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{-\chi}. \tag{1.28}$$

从 I_a+I_b 之和中减除正比于 $\ln[\Lambda^2/(-\chi)]$ 的项，我们得到重整化顶角函数的表达式

$$I^R=\frac{g^3\varepsilon^{abc}k_\mu}{16\pi^2}\left(\tilde{b}_1-\ln\frac{k^2}{\chi}\right), \tag{1.29}$$

其中，$\tilde{b}_1$ 是一个任意常数。所进行的减除等效于在拉氏量中插进抵消项

$$\frac{\mathrm{tr}}{2}\{g(\tilde{z}_1-1)\bar{c}\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,c]\}, \tag{1.30}$$

其中

$$\tilde{z}_1-1=-\frac{g^2}{16\pi^2}\left(\ln\frac{\Lambda^2}{-\chi}+\tilde{b}_1\right). \tag{1.31}$$

最后，我们不加计算地给出杨-米尔斯场格林函数（如图 4）和三点顶角 $\Gamma_{\mathscr{A}^3}$（如图 5）的最低级修正的表达式。

在这些图形中去掉发散的抵消项为

$$-\frac{\mathrm{tr}}{g}\{(z_2-1)(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)^2+2g(z_1-1)$$
$$\times(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]\}, \tag{1.32}$$

其中

$$z_2 - 1 = \frac{g^2 \cdot 5}{24\pi^2} \ln\frac{\Lambda^2}{-\chi} + b_2, \tag{1.33}$$

$$z_1 - 1 = \frac{g^3}{12\pi^2} \ln\frac{\Lambda^2}{-\chi} + b_1, \tag{1.34}$$

b_1 和 b_2 是任意的有限常数。

如所见到的，为了从所考虑的图中去掉发散，的确只需要重新定义原始拉氏量中的参量。然而应注意，(1.16)、(1.30)及 (1.32) 式一般说来不是规范不变的。它们的明显形式依赖于所用的中间正规化和所选择的减除点。特别是，为了从两点格林函数中去掉发散，需要引进明显地不是不变的抵消项

$$\delta_m \mathrm{tr}\{\mathscr{A}_\mu \mathscr{A}_\mu\}. \tag{1.35}$$

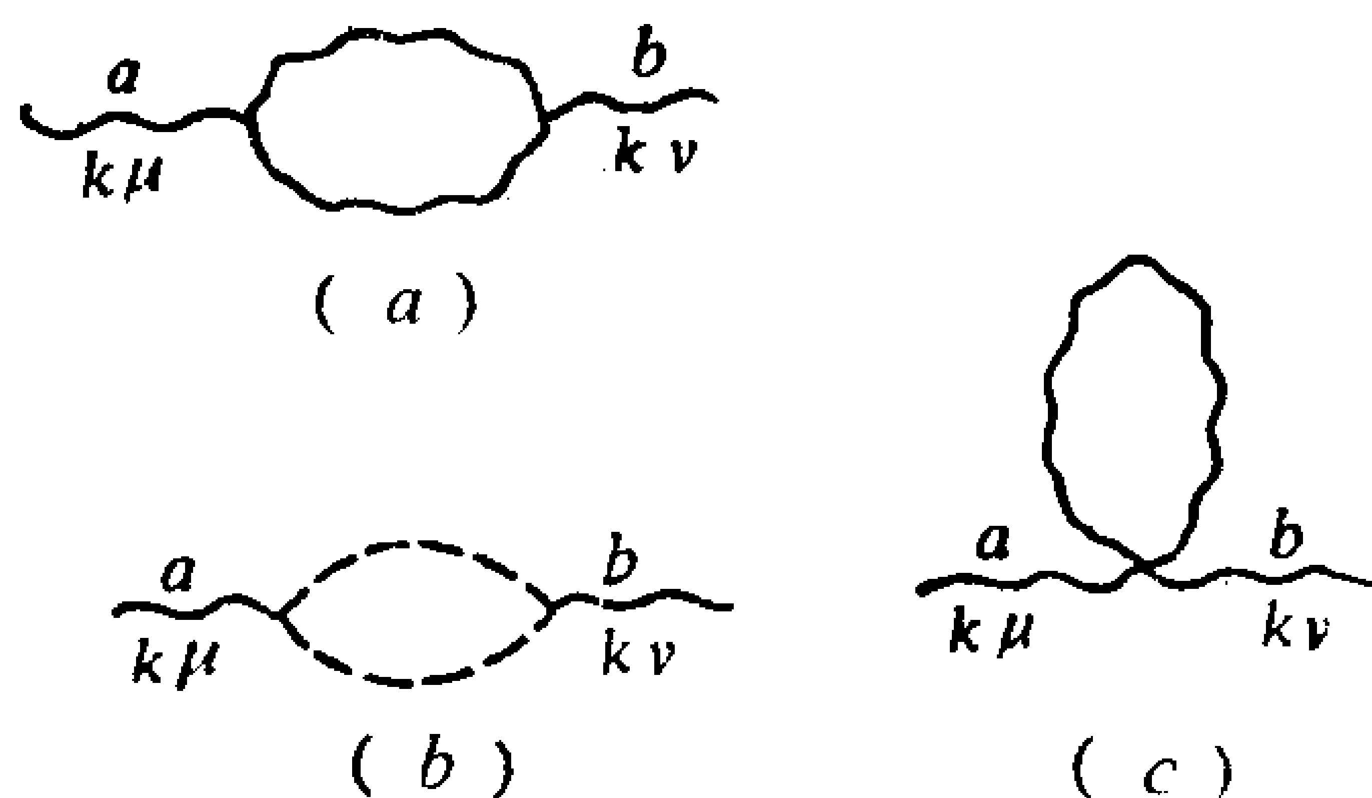


图4 对杨-米尔斯场格林函数的二级修正

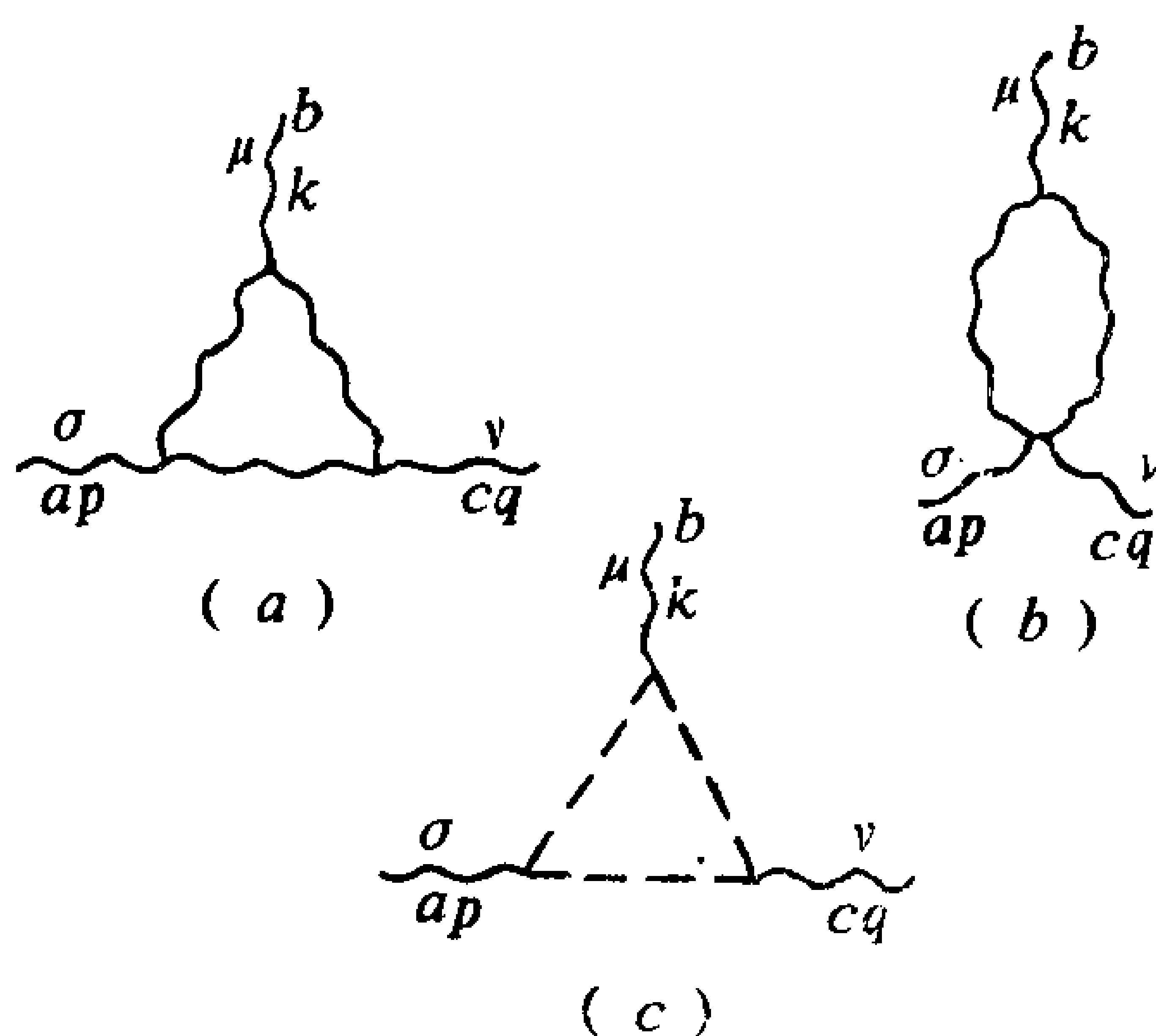


图5 对顶角函数 $\Gamma_{\mathscr{A}^3}$ 的三级修正

当然，具有物理意义的不是抵消项本身，而是重整化以后的有限的矩阵元。为了理论上保持自洽，需要重整化后的矩阵元满足相对性原理。规范理论重整化步骤的特殊性质正是在这里。本章将要研究这些特殊性质。

§4.2 *R* 运算和抵消项

在上一节里，我们讨论了从最简单图形中消去发散的步骤。在所考虑的例子中，只包含对 dk 的一个积分，因此，在去掉中间正规化以后，就只需要从对外动量的泰勒展开式中减除最初几项相应的函数就趋向确定的极限。正象我们已经看到的那样，这样的减除等于重新定义原始拉氏量，也就是引进抵消项。

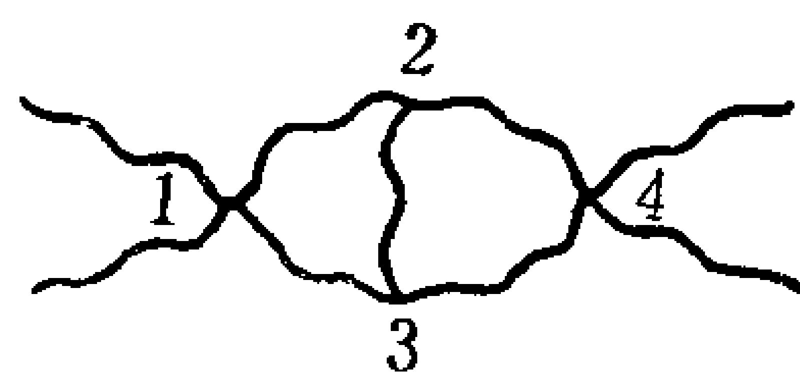


图 6

对于更复杂的图形，例如象图 6 那样的图形，相应的积分有如下形式

$$\int f(p_1,\cdots,p_m,k_1,\cdots,k_n)dk_1\cdots dk_n, \qquad (2.1)$$

它不仅在所有的 k_i 都同时趋于无穷时发散，而且在某些 k_i 趋于无穷而剩下的保持固定时也发散。在此情况下，我们说这一图形有发散的子图。对于图 6 中的图形，这样的子图由顶点（1,2,3）和联接它们的线组成，也由顶点（2,3,4）和联接它们的线组成。对于包含发散子图的图形，在 §4.1 中描述的去掉发散的方法是不够的。在此情况下，问题由伯格留波夫和帕拉秀克[Parasyuk]的 ***R*** 运算得到解决，它为任意的费曼图提供了相应的有限的系数函数。***R*** 运算的详细讨论可以在伯格留波夫和希尔科夫的书[1]中找到，我们在这里不重复它。为了我们的目的，只需要知道 ***R*** 运算等效于在拉氏量中插进一些可以表示为耦合常数的级数的抵消项。为了说明这样做的方法，需要给出一些定义。

如果一个图形不能分为相互之间没有用线连接起来的几个部分，则称它是连接的。一个图形被称为是强连接的，或单粒子不可约的，如果它不能通过仅仅去掉一根线而变成不连接图形。一个切掉了全部外线的强连接图形被称为是正规顶角函数，用

$\Gamma(x_1,\cdots,x_n)$表示。一个强连接格林函数$G(x_1,\cdots,x_n)$，由正规顶角函数$\Gamma(x_1,\cdots,x_n)$按下式表示出来：

$$G(x_1,\cdots,x_n)=\int dx_1'\cdots dx_n' G_1(x_1-x_1')\cdots$$

$$\cdots G_n(x_n-x_n')\Gamma(x_1',\cdots,x_n'), \tag{2.2}$$

其中$G_i(x_i-x_i')$是对应于第i条外线的两点格林函数。

图形的拓扑结构可以很方便地用一个给定的图形中所包含的独立循环的数目来表征。有一个循环的图称为单圈图；有两个循环的图称为双圈图；等等。具有给定圈数的图形对应于在S矩阵或格林函数生成泛函按普朗克常数h的展开式中的同级项。由于这一原因，它们形成一个不变的组合：那就是说，完全的S矩阵的全部对称性质都独立地为具有固定圈数的图形的组合所满足。

为了表征消除发散的步骤，引进图形指数的概念。设对应于一个n阶强连接图形的系数函数具有富里叶变换

$$J(k)=\int\prod_{1\le q\le n}\delta(\sum p-k_q)\prod_{l=1}^{L}D_l(p_l)dp_l, \tag{2.3}$$

其中指标q是顶角的编号，而l是内线的编号。δ函数的宗量是进入第q个顶角的动量的代数和。格林函数$D_l(p_l)$有以下形式

$$D_l(p_l)=Z(p_l)(m_l^2-p_l^2)^{-1}, \tag{2.4}$$

其中$Z(p_l)$是一个r_l次的多项式。

让我们对所有的动量(和质量)进行一个标度变换：$p_l,k_l\longrightarrow ap_l,ak_l$。如果积分$J(k)$收敛，则在这一变换之下，它将乘上$a^{\omega}$。这里的图形指数$\omega$包含以下因子：每条内线贡献因子$r_l-2$，结果得到$\sum_{l=1}^{L}(r_l-2)$，其中$L$是内线总数；在(2.3)式中，积分对$L$个变量$p_l$进行，然而$\delta$函数去掉了$(n-1)$重积分(有一个$\delta$函数表示总动量守恒)，因此，剩下$4(L-n+1)$个独立的微分，它们对图形指数$\omega$给出一个总的贡献$4(L-n+1)$；如果相互作用

拉氏量包含导数，则每一个有m阶导数的顶点引进一个附加的因子m。把这些因子全部加起来，我们得到

$$\omega = \sum_{l} (r_l + 2) - 4(n - 1) + mn. \tag{2.5}$$

指数ω决定了，当全部动量均匀地增大时，系数函数增长的方次。在$\omega \geqslant 0$时，这一定义一般说来失去了意义，因为相应的积分发散。在此情况下，图形指数决定系数函数增长的表面方次。如果图形指数不是负的，相应的积分就发散。但反过来说不一定对，因为图形的指数只表征它在全部动量同时都增大时的行为，而与它在一部分积分变量趋于无穷，且其余的保持固定时的行为无关。换句话说，一个有负指数的图形可以有发散的子图。指数为负是原始发散图形收敛的充分条件。所谓原始发散图就是切断任一根内线都会变成收敛的图形。在第一节中考查的图形是原始发散图，而图6中的图形有发散子图（1,2,3）和（2,3,4）。显然，单圈图只能是原始发散图。

我们现在就能够陈述用插入抵消项来从任意图形中消除发散的办法。首先，我们将引进一个中间正规化来使得所有的积分收敛[例如，用（1.3）式]。

让我们先考查单圈图。前面已经看到，为了在去掉正规化以后相应的系数能趋向确定的极限，只要从它们里面减除对外动量的泰勒展开式中的几个领头项。而这一减除又等效于在拉氏量中插入抵消项，即用$\mathscr{L}_{\Lambda} + \Delta\mathscr{L}_1$代替原始的正规化拉氏量$\mathscr{L}_{\Lambda}$。

抵消项$\Delta\mathscr{L}_1$的明显表达式用下述办法得到。设G_s^n为一个有非负指数ω，并有n个顶角和s条外线$\mathscr{A}_\mu$的强连接图。和它对应的正规顶角函数是$\Gamma_s^n(x_1, \cdots, x_n)$。减除多项式由$\Gamma_s^n$的富里叶变换式的泰勒级数展开中的头几项组成，在坐标表象中它有以下形式

$$Z_\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\delta(x_1 - x_2)\cdots\delta(x_{n-1} - x_n), \tag{2.6}$$

其中Z是一个ω次的对称多项式．为了得到与给定图形相应的抵消项，需要将（2.6）式乘上乘积

$$\mathscr{A}_{\mu_1}(x_1)\cdots\mathscr{A}_{\mu_s}(x_s), \tag{2.7}$$

然后将所得到的表达式对 $\mu_1\cdots\mu_s$ 作和并对所有的变量 $x_1\cdots x_n$ 除了一个以外进行积分（如果除了矢量外线之外，图形还包含其他外线——例如旋量和标量线——则所有的讨论都是一样的，只不过对称化只对同一种类型的线进行）．

现在用 $\mathscr{L}_A+\Delta\mathscr{L}_1$ 作为拉氏量来计算双圈图．这样得到的双圈图不再包含发散子图；那就是说，当去掉中间正规化后，只在全部积分变量同时趋向无穷时才出现发散．这一事实在发散，子图不交迭时是很清楚的，例如图7那样的图形．在此情况下，从子图（2.3）中消去发散的抵消项 $\Delta\mathscr{L}_1$ 有以下形式

$$-\frac{(z_2-1)}{4}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)^2, \tag{2.8}$$

而拉氏量 $\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}_1$ 除了图7之外还产生图8中画出的图形，其中的叉表示顶角（2.8）式．与图7和图8之和相对应的积分只在所有动量同时趋于无穷大时才发散，而为了消去这一发散，也只要从积分中减掉泰勒级数展开的头两项就够了，这等效于在拉氏量中插入一个新的抵消项 $\Delta\mathscr{L}_2$：



图7

$$\mathscr{L}\longrightarrow\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}_1+\Delta\mathscr{L}_2. \tag{2.9}$$

当存在交迭发散子图时（例如图6），类似的论断的证明较为复杂，我们这里不叙述它．


图8

按这种方式进行下去，我们得到重整化的拉氏量

$$\mathscr{L}_R=\mathscr{L}+\Delta\mathscr{L}_1+\cdots+\Delta\mathscr{L}_n, \tag{2.10}$$

其中 $\Delta\mathscr{L}_i$ 是场和它的导数的局域多项式。对于这一拉氏量，所有包含不超过 n 个圈的图形在去掉中间正规化以后都收敛于有限的极限。显然，这样我们就能够按照微扰论计算格林函数准确到任意有限的阶数 n。当 n 增加时，抵消项的总数自然增多，然而不同类型抵消项的数目有可能保持有限（我们称一个抵消项对场的泛函依赖性为这个抵消项的**类型**）。在此情况下就说这一理论是可重整的。一个可重整的理论决定于有限个参量，这些参量的意义是物理的荷和质量。但是，如果抵消项类型的数目无限增多（那就是说，在愈高阶的微扰论中会出现包含愈来愈多的场及其导数的结构），则这一理论称为不可重整的。因为插进一个新的抵消项等效于出现一个新的任意常数（减除点的位置），不可重整的理论不能由有限数目的参量决定。对于不可重整的拉氏量，微扰论方法看来是无意义的，在这里我们将不考虑它们。

抵消项的明显形式依赖于具体的中间正规化和减除点（即泰勒级数展开的中心点）的选择。选择一种不方便的正规化将使得对于重整化理论的分析变得非常困难。在规范场的情况下，能够保持未重整化理论的形式对称性的所谓不变正规化是特别方便的。

§4.3 不变正规化 泡利-维拉方法

R 运算中的抵消项形式对于研究杨-米尔斯场是方便的，因为它使得我们能够以一种简单而明显的方式考虑对称性质。象我们在前一章中看到的那样，相对性原理使我们能够从不同的规范出发为杨-米尔斯场建立微扰论。从重整化的观点看来，在其中 S 矩阵有么正性的规范(对于无质量杨-米尔斯场是库仑规范或哈密顿规范，而对于有自发破缺对称性的理论是么正规范）是不方

便的．在前两种情况下，没有明显的相对论不变性，而在后一情况下不存在明显的可重整性．在这一意义上更加方便得多的是明显协变的规范，例如洛仑兹规范．我们将看到，对它说来可重整性是明显的．然而，在洛仑兹规范中，不能构造哈密顿理论体系，因而S矩阵的么正性不明显．从算符形式的观点看来，洛仑兹规范中的S矩阵作用在一个既包含物理的态又包含非物理的态（纵"光子"和时间"光子"，标量费米子，哥德斯通玻色子）的"巨"空间中；一般说来，它只有在这一空间中才是么正的．在这一空间中，度规不定．物理子空间中的状态对应于物质的场和横向矢量量子．在物理子空间中，S矩阵的么正性是相对性原理的结论，按照这一原理，所有可观测量都不依赖于实际选择的规范条件．这可以由上一章中明显地进行的计算得到肯定，在那里证明了，S矩阵系数函数在库仑规范中的一个明显么正的生成泛函，可以恒等地转变为洛仑兹规范中的生成泛函．然而，所给的论证带有形式的性质，因为我们没有注意在这些泛函的微扰论计算中所出现的发散．的确，在量子理论中，相对性原理应该应用于去掉了发散的重整化对象．将这一原理转到重整化理论中并不是件容易的事．重整化等效于重新定义原始的拉氏量．因此，有必要证明重整化的拉氏量是规范不变的．这样我们才能将它应用到上一章的论证中，严格地证明不同规范的等效性，以及由此得到的S矩阵的么正性．

后一论断还需要澄清．我们已经看到，重整化拉氏量的明显形式依赖于所用的中间正规化．以上所说的只适用于不变中间正规化，就是保持未重整理论的形式对称性的正规化．自然，这并不意味着，为了计算S矩阵，不能用非不变的正规化．然而，在那种情况下，正规化的理论不是规范不变的，而前一章中证明不同规范等效性的论证对它不适用．相对性原理只对于去掉正规化以后的重整化S矩阵才成立．所有这些使得么正性的证明复杂

化，并使得它不那么清楚。因此，我们对杨-米尔斯理论重整化步骤的描述将从建立规范不变的中间正规化开始。规范理论的不变正规化的特殊性质是由于真空中杨-米尔斯场的相互作用。和物质场的相互作用不带来任何困难，相应的图形可以用推广的规范不变的泡利(Pauli)—维拉(Villars)方法来正规化。

我们用第一章中的(3.1)式所描述的杨-米尔斯场和旋量场ψ的相互作用作为例子来证明后一论断。格林函数的生成泛函是

$$Z(J_\mu,\bar{\eta},\eta)=N^{-1}\int\exp\left\{i\left[\mathscr{L}_{YM}+\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu^a)^2\right.\right.$$
$$+i\bar{\psi}(\hat{\partial}-g\Gamma^a\hat{A}^a)\psi-\mu_0\bar{\psi}\psi+J_\mu^a A_\mu^a$$
$$\left.\left.+\bar{\eta}\psi+\bar{\psi}\eta\right]dx\right\}\det M\prod_x d\mathscr{A}_\mu d\bar{\psi}d\psi. \tag{3.1}$$

不包含矢量内线的发散图形(旋量环)，可以用电动力学中同样的方式正规化，即从中减除掉质量为μ_i的旋量场所形成的相似的环。实际上，如果我们只对旋量环感兴趣，可以让源$\bar{\eta}$，η等于零。剩下的对ψ和$\bar{\psi}$的高斯积分可以明显地算出。它等于$\det X_0$，其中

$$X_0=i\gamma_\mu\partial_\mu-\mu_0-ig\Gamma^a\gamma_\mu A_\mu^a. \tag{3.2}$$

正规化就是将$\det X_0$用下述乘积代换：

$$\det X_0\to\det X_0\prod_{j=1}^{n}(\det X_j)^{c_j}$$
$$=\exp\left\{\mathrm{Tr}\ln X_0+\sum_{j=1}^{n}c_j\mathrm{Tr}\ln X_j\right\}, \tag{3.3}$$

其中算符X_j和算符X_0类似地构成：

$$X_j=i\hat{\partial}-\mu_j-ig\Gamma^a\hat{A}^a, \tag{3.4}$$

而系数c_j满足条件

$$\sum c_j+1=0,\qquad \sum c_j\mu_j^2=0. \tag{3.5}$$

为了证实(3.3)式确实将旋量环正规化，让我们将 $\det X_j$ 写成

$$\det X_j=\det(i\hat{\partial}-\mu_j)\det\{1-g(i\hat{\partial}-\mu_j)^{-1}i\Gamma^a\hat{\mathcal{A}}^a\}. \tag{3.6}$$

第一个因子不依赖于场$\mathscr{A}_\mu$，因而可以包含在归一化常数N之中。第二个因子可以改写成

$$\begin{aligned}&\exp\{\mathrm{Tr}\ln[1-g(i\hat{\partial}-\mu_j)^{-1}i\Gamma^a\hat{\mathcal{A}}^a]\}\\&=\exp\Big\{-\Big[\frac{(ig)^2}{2}\mathrm{tr}\int[\Gamma^{a_1}\hat{\mathcal{A}}^{a_1}(x_1)S^j(x_1-x_2)\\&\quad\times\Gamma^{a_2}\hat{\mathcal{A}}^{a_2}(x_2)S^j(x_2-x_1)]dx_1dx_2+\cdots\\&\quad+\frac{(ig)^n}{n}\mathrm{tr}\int\Gamma^{a_1}\hat{\mathcal{A}}^{a_1}(x_1)S^j(x_1-x_2)\cdots\\&\quad\cdots\Gamma^{a_n}\hat{\mathcal{A}}^{a_n}(x_n)S^j(x_n-x_1)dx_1\cdots dx_n\Big]\Big\},\end{aligned} \tag{3.7}$$

其中，$S^j(x)$是旋量格林函数

$$S^j(x)\equiv(i\hat{\partial}-\mu_j)^{-1}=\frac{-1}{(2\pi)^4}\int\frac{\mu_j+\hat{p}}{\mu_j^2-p^2-i0}e^{-ipx}dp. \tag{3.8}$$

进行富里叶变换，指数中的第 n 项可以写成

$$\begin{aligned}&\text{常数}\cdot\int\Big[\int dp\frac{\mathrm{tr}[\gamma_{\nu_1}(\mu_j+\hat{p})\cdots\gamma_{\nu_n}(\mu_j+\hat{p}+k_{n-1})]}{(\mu_j^2-p^2)(\mu_j^2-(p+k_1)^2]\cdots[\mu_j^2-(p+k_{n-1})^2]}\\&\quad\times\mathrm{tr}[\Gamma^{a_1}A^{a_1}_{\nu_1}(k_1)\cdots\Gamma^{a_n}A^{a_n}_{\nu_n}(k_n)]\\&\quad\times\delta(k_n-k_1-\cdots-k_{n-1})\Big]dk_1\cdots dk_n.\end{aligned} \tag{3.9}$$

这里的第一个tr是对旋量指标求迹，而第二个 tr 是对内禀自由度求迹。在$n\leqslant4$ 时，对 p 的积分发散。在 p 大时，这一积分的被积函数可以表示成 μ_j 的级数：

$$\begin{aligned}&\frac{P_n(p)+\mu_j^2P_{n-2}(p)+\cdots+\mu_j^n}{P_{2n}(p)+\mu_j^2P_{2n-2}(p)+\cdots+\mu_j^{2n}}=\frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)}\\&\quad+\frac{P_n(p)}{P_{2n}(p)}\Big[\frac{P_{n-2}(p)}{P_n(p)}-\frac{P_{2n-2}(p)}{P_{2n}(p)}\Big]\mu_j^2+\cdots,\end{aligned} \tag{3.10}$$

其中，$P_j(p)$ 是 p 的 j 次多项式。μ_j^{2k} 的系数在 p 大时的行为是 p^{-n-2k}。如果系数 c_j 满足条件(3.5)式，则(3.3)式中被积函数按 p 展开的渐近展开式中的两个最高次项消去，且正规化表达式的渐近行为是p^{-n-4}。这样，所有对 p 的积分都收敛。

如果对 $\det X_j$ 采用如下形式的表达式：

$$[\det X_j]^{\pm 1}$$
$$=\int \exp\left\{i\int[i\bar{\psi}_j(\hat{\partial}-g\Gamma^a\mathscr{A}^a)\psi_j-\mu_j\bar{\psi}_j\psi_j]\,dx\right\}\prod_x d\bar{\psi}_j d\psi_j,\quad(3.11)$$

其中 $\bar{\psi}_j$ 和 ψ_j 是辅助的旋量变量，则正规化的生成泛函可以用一个在指数中包含局域作用量的路径积分表示。(3.11)式左边行列式的指数依赖于场 ψ 的对易性质。指数 $+1$ 对应于反对易变量，而-1对应于对易变量。将(3.3)式中的系数c_j 选成整数，就可以将正规化因子 $\prod_{j=1}^{n}(\det X_j)^{c_j}$写成

$$\prod_{j=1}^{n}(\det X_j)^{c_j}=\int\exp\left\{i\int\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k=1}^{|c_j|}[i\bar{\psi}_{jk}(\hat{\partial}-g\Gamma^a\mathscr{A}^a)\psi_{jk}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\mu_j\bar{\psi}_{jk}\psi_{jk}]\right]dx\prod_{x,j,k}d\bar{\psi}_{jk}d\psi_{jk}\right\}.\quad(3.12)$$

这里假定系数c_j和质量μ_j满足条件(3.5)式。可对易的辅助场 $\bar{\psi}_{jk}$，ψ_{jk}对应于负的系数c_j，而反对易的辅助场对应于正的系数c_j。

将(3.1)式中的作用量加上由(3.12)式的右边所得到的作用量，就可以将正规化的生成泛函写成对exp{$i\times$*局域作用量*}的路径积分的形式。(3.12)式对于场 $\mathscr{A}_\mu$，$\bar{\psi}_{jk}$，ψ_{jk} 同时进行的规范变换是明显不变的，因此(3.3)式不改变生成泛函的对称性质。

上述方法显然可以推广到杨-米尔斯场和标量场相互作用的情况。唯一的差别在于，由于标量场是可对易的对象，闭合环之和等于$(\det Y_0)^{-1}$，而正规化的办法是作代换

$$(\det Y_0)^{-1}\to(\det Y_0)^{-1}\prod_j(\det Y_j)^{-c_j}.\quad(3.13)$$

泡利-维拉正规化适用于相互作用拉氏量对形成发散环的场是二次的情况。因此，它不能推广到杨-米尔斯场本身。在这里，人们不得不求助于更为复杂的方法。我们仍然局限于考查真空中的杨-米尔斯场。

对于非阿贝尔规范场，目前存在两种不变正规化方法：高阶协变导数方法和维数正规化方法。

第一种方法实际上是对于自由传播子（为了简单起见，写的是标量传播子）用减除

$$-\frac{1}{k^2}\to\frac{1}{-k^2}-\frac{1}{\Lambda^2-k^2}=-\frac{1}{k^2-\Lambda^2k^4}\qquad(3.14)$$

来正规化的标准正规化步骤所作的具有不变性的推广。这种减除等效于在拉氏量中插进有高阶导数的项：

$$\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi\to\frac{1}{2}\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi+\frac{1}{2\Lambda^2}\Box\varphi\Box\varphi.\qquad(3.15)$$

在杨-米尔斯场的情况下，这样一种做法破坏了规范不变性，因为通常的导数不是协变的。对（3.15）式的一种自然的推广是在杨-米尔斯拉氏量中加进一个包含高阶协变导数的项，例如，

$$\mathscr{L}_{YM}\to\mathscr{L}^{\Lambda}_{YM}=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\left\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\frac{1}{\Lambda^2}\nabla_\alpha\mathscr{F}_{\mu\nu}\nabla_\alpha\mathscr{F}_{\mu\nu}\right\}$$

$$=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\left\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\frac{1}{\Lambda^2}(\partial_\alpha\mathscr{F}_{\mu\nu}-g[\mathscr{A}_\alpha,\mathscr{F}_{\mu\nu}])^2\right\}\qquad(3.16)$$

由(3.16)式可以得到所需要的对自由传播子的修正。然而，为获得不变性所付出的代价是在相互作用拉氏量中出现了新的顶点。下面我们将更详细地讨论这种正规化，现在只指出，由于出现了带导数的新顶点，正规化只是部分的——在正规化的理论中，二阶、三阶和四阶图形仍然发散。因此，单用高阶协变导数方法不能完全解决问题。而只将问题化为研究超可重整理论，即只产生有限个发散图形的理论。以下将证明，剩下的图形可以用略加修改的泡利-维拉方法来正规化。其结果，得到了一个明显

不变的拉氏量，它(当正规化参量取有限值时)产生收敛的图形．这一方法的缺点是比较繁．由于在相互作用拉氏量中出现新顶点，图形的数目大大增多，妨碍了实际计算．然而，为了研究幺正性和可重整性这样的基本问题，这一方法是最方便的，因为正规化的作用量有明显不变的表达式，使我们能将上一章中关于不同规范等效性的论证直接应用到正规化的情况，而这样就证明了重整化理论的幺正性．

和高阶协变导数方法不一样，维数正规化并不归结为原始拉氏量的某种修正，而是直接地处理费曼图．这一方法是基于以下两件事实：

（1）格林函数之间的形式的对称关系（广义瓦德恒等式）不依赖于时空维数（n）．

（2）当n足够小或者是复数时，所有的图形都对应于收敛的积分．

这样，广义瓦德恒等式能够在使所有积分都收敛的n的区域中严格地证明，然后利用解析延拓可以过渡到$n=4$．

维数正规化方法对于计算具体图形很方便，在实际计算中得到了相当广泛的应用．然而，对于研究带原则性的问题它也有缺点．因为，如果n是非整数或复数，就找不到与正规化理论对应的拉氏量，因而不能应用在路径积分中作变量代换来证明幺正性的方法，而必须直接处理费曼图，这就更费力得多．包含费米子的理论的正规化还更加复杂．由于γ矩阵的代数与空间的维数有很大关系，这样的理论需要特殊的考查．

这样，高阶协变导数方法和维数正规化方法在某种意义上是相互补充的；前一方法对于普遍性的证明更为方便，这类证明实际上只要求存在具有不变性的正规化作用量；而第二个方法对计算具体过程更为有效．

§4.4 高阶协变导数方法

这种正规化方法包含两个步骤：首先，通过在拉氏量中插进高阶协变导数，我们就过渡到超可重整理论，其中只包含有限数目的单圈图；然后，再用修改了的泡利-维拉方法来将这些单圈图正规化。

按（3.16）式修改拉氏量还不足以保证包含一个圈以上的图形都收敛。(3.16)式显然对应于超可重整理论，却在第4阶产生了一个发散的双圈自能图。为了使这一发散也消去，我们在拉氏量中插进一个包含4阶协变导数的项：

$$\mathscr{L}_{YM}\longrightarrow\mathscr{L}_{\Lambda}=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\left\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}+\frac{1}{\Lambda^4}\nabla^2\mathscr{F}_{\mu\nu}\nabla^2\mathscr{F}_{\mu\nu}\right\}. \quad (4.1)$$

正规化的拉氏量的规范不变性是明显的。

正规化的格林函数生成泛函有以下形式

$$Z_{\Lambda}(J_\mu)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_{\Lambda}(x)+\frac{1}{2\alpha}\{f(\Box)\partial_\mu A_\mu^a\}^2+J_\mu^a A_\mu^a\right]dx\right\}\det M\prod_x d\mathscr{A}, \quad (4.2)$$

其中，$f(\Box)$ 是达朗贝尔算符的任意函数，它决定了广义 α 规范的具体形式．杨-米尔斯场的正规化的自由传播子按通常的方式构成：

$$D_{\mu\nu}^{ab}=\delta^{ab}\left[-\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\frac{1}{k^2+\Lambda^{-1}k^6}-\frac{\alpha k_\mu k_\nu}{k^4 f^2(-k^2)}\right]. \quad (4.3)$$

在洛仑兹规范中（$\alpha=0$），当 k 大时，传播子的行为是 k^{-6}．如果 $\alpha\neq0$，我们将这样来选择函数 $f(-k^2)$，使得传播子在 $k\to\infty$ 和 $k\to0$ 时的行为不受损害，例如

$$f(-k^2)=k^2-\chi^2, \quad (4.4)$$

其中 χ^2 是一个任意参量．

明显地写出（4.1）式中$\sim\Lambda^{-4}$的项：

$$\frac{\mathrm{tr}}{8\Lambda^4}\Big\{[\Box(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)]^2$$
$$-2[\Box(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)]\partial_\alpha[\mathscr{A}_\alpha,\mathscr{F}_{\mu\nu}]+\cdots$$
$$+[\mathscr{A}_\beta[\mathscr{A}_\alpha[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]]]^2\Big\},\tag{4.5}$$

我们看到，它产生具有三根，四根，五根，六根，七根和八根线的顶角。在这些顶角中，导数的最大数目分别是5，4，3，2，1，0．现在让我们来计算一个任意图形的指数．注意到在我们的情况下$r_l=-4$，可知一个包含n_k个有k条线的顶角，$L_内$根内线和$L_外$根外线的图形的指数由下式给出：

$$\omega\leqslant 4+n_3-n_5-2n_6-3n_7-4n_8-2L_内$$
$$=6-2\Pi-n_3-2n_4-3n_5-4n_6-5n_7-6n_8,\tag{4.6}$$

其中Π是封闭圈的数目。

不难看到，只有那些对应于有两根外线的单圈二阶图，或有三根外线的三阶图，或有四根外线的四阶图的积分才可能是发散的．行列式$\det M$也产生类似的发散图形．所有其他图形，包括有虚构c粒子外线的单圈图都对应着收敛的积分。

为了将单圈图正规化，很自然的是尝试应用泡利-维拉方法。显然，只要将强连接的单圈图加以正规化就够了。

具有外线$\mathscr{A}_\mu$的闭合环的总贡献可以写成

$$Z_0=N^{-1}\int\exp\Big\{i\iint\Big[\frac{1}{2}\frac{\delta^2S_\Lambda}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}q_\mu^a(x)q_\nu^b(y)\Big]dxdy$$
$$+\frac{1}{2\alpha}\int\Big\{f(\Box)\partial_\mu q_\mu^a(x)\Big\}^2dx\Big\}\det M(\mathscr{A})\prod_x dq_\mu.\tag{4.7}$$

在（4.7）式中，除了强连接图之外，也包含它们的乘积，即不连接图。后者显然在它们的连接分量正规化以后自动地变成有限的。

我们在这里用场 $\mathscr{A}_\mu$ 而不用源 J_μ 来作为宗量，是考虑到由泛函 Z_0 产生的单圈图可以被包含在更复杂的图形中作为子图，以一定的权重对 $\mathscr{A}_\mu$ 积分.

$Z_0(\mathscr{A})$ 展开成微扰论级数产生闭合的环，沿着这种环传播零质量的矢量(q_μ)和标量(c)粒子.采取与对物质场的环所实行的类似步骤，通过减除类似的环来将 $Z_0(\mathscr{A})$ 正规化，在这种环中有质量为 μ 的矢量和标量粒子传播.然而，这一减除将破坏规范不变性.物质场单圈图的生成泛函对于它的宗量的规范变换是不变的，而泛函 $Z_0(\mathscr{A}_\mu)$ 却没有这样的性质.这是因为在它里面出现了固定规范的项，也由于有虚构粒子的环，它们破坏了明显的规范不变性.然而，我们将看到，泛函 $Z_0(\mathscr{A}_\mu)$ 的发散部分在场 $\mathscr{A}_\mu$ 的规范变换下是不变的.准确到有限的不需要正规化的项，(4.7)式可以改写成明显不变的形式：

$$Z_0=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}q_\mu^a(x)q_\nu^b(y)\right]dxdy\right\}$$

$$\times\det\nabla_\mu^2\prod_x\delta(\nabla_\mu q_\mu)dq_\mu+\cdots, \tag{4.8}$$

其中

$$\nabla_\mu q_\mu=\partial_\mu q_\mu-g[\mathscr{A}_\mu,q_\mu], \tag{4.9}$$

省略号…表示不需要正规化的有限项.

为了证明这一点，我们采用一种熟悉的方法.利用条件

$$\Delta_V(\mathscr{A}_\mu,q_\mu)\int\prod_x\delta(\nabla_\mu q_\mu^\omega)d\omega=1, \tag{4.10}$$

$$\Delta_W(\mathscr{A}_\mu,q_\mu)\int\prod_x\delta(\partial_\mu q_\mu^\omega-W(x))d\omega=1. \tag{4.11}$$

引进泛函 $\Delta_V(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)$ 和 $\Delta_W(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)$，其中规范变换 $q_\mu\to q_\mu^\omega$ 是一个依赖于 $\mathscr{A}_\mu$, ω 的平移变换：

$$q_\mu^\omega = q_\mu + \frac{1}{\varepsilon}\left\{\mathscr{A}_\mu^\omega - \mathscr{A}_\mu\right\}$$

$$= q_\mu + \frac{1}{\varepsilon}\left\{\partial_\mu u - g[\mathscr{A}_\mu, u] + O(u^2)\right\}, \tag{4.12}$$

其中 ε 是一个小参量.

(4.10) 和 (4.11) 式中的积分是在群 Ω 的不变度规上进行. 泛函 Δ_V, Δ_W 显然对 (4.12) 式不变.

用和第三章中相同的论证可以看到，在表面 $\Delta_\mu q_\mu = 0$ 上泛函 Δ_V 等于

$$\Delta_V(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)\,|_{\nabla_\mu q_\mu = 0} = \det \varepsilon^{-1} \nabla_\mu^2$$

$$= \det\Big[\{\Box - g\partial_\mu[\mathscr{A}_A,\quad] - g[\mathscr{A}_\mu, \partial_\mu]$$

$$+ g^2[\mathscr{A}_\mu, [\mathscr{A}_\mu,\quad]]\}\Big]\cdot\varepsilon^{-1}, \tag{4.13}$$

而在表面 $\partial_\mu q_\mu = W$ 上，泛函 Δ_W 等于

$$\Delta_W(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)\,|_{\partial_\mu q_\mu = W} = \det\varepsilon^{-1}\{\Box - g\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,\quad]\}$$

$$= \det\varepsilon^{-1} M. \tag{4.14}$$

常数因子 ε^{-1}[注] 只不过引起归一化常数 N 的重新定义，因此下面将略去它们.

考虑到 (4.10) 和 (4.14) 式可以改写泛函 Z_0 为

$$Z_0(\mathscr{A}) = N^{-1}\int \exp\Big\{i\iint\Big[-\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\,\delta A_\nu^b(y)} q_\mu^a(x) q_\nu^b(y)$$

$$+ \frac{1}{2a}\{f(\Box)W(x)\}^2 \delta(x-y)\Big]dxdy\Big\}$$

$$\times \prod_x \delta(\partial_\mu q_\mu - W)\Delta_W(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)\delta(\nabla_\mu q_\mu^\omega)$$

$$\times \Delta_V(\mathscr{A}_\mu, q_\mu)\, d\omega dW dq_\mu\,. \tag{4.15}$$

换成新变量

$$q_\mu \to q_\mu^{\omega^{-1}}, \quad \omega^{-1} \to \omega, \tag{4.16}$$

[注] 原书中为 $\det\varepsilon^{-1}$.　　译者

我们有

$$Z_0(\mathscr{A}) = N^{-1}\int \exp\left\{i\iint\left[\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}[q_\mu^\omega(x)]^a[q_\nu^\omega(y)]^b\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2\alpha}\{f(\Box)W(x)\}^2\delta(x-y)\right]dxdy\right\}\prod_x \delta(\partial_\mu q_\mu^\omega - W)$$

$$\times \Delta_W \delta(\nabla_\mu q_\mu)\det\nabla_\mu^2 d\omega dW dq_\mu. \qquad (4.17)$$

用 δ 函数 $\delta(\partial_\mu q_\mu^\omega - W)$ 消去对 ω 的积分．在此过程中产生的雅可比和 Δ_W 相消，而 ω 通过方程

$$\partial_\mu(\partial_\mu u - g[\mathscr{A}_\mu, u] + O(u^2)) = \varepsilon(W - \partial_\mu q_\mu) \qquad (4.18)$$

用 q_μ、W 表出．这一方程的解有以下形式

$$u = \varepsilon M^{-1}(W - \partial_\mu q_\mu) + O(\varepsilon^2). \qquad (4.19)$$

将这一解代入（4.17）式中，得

$$Z_0(\mathscr{A}) = N^{-1}\int \exp\left\{i\iint\left[\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}\right.\right.$$

$$\times[q_\mu + \nabla_\mu M^{-1}(W - \partial_\rho q_\rho)]^a[q_\nu + \nabla_\nu M^{-1}(W - \partial_\rho q_\rho)]^b$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2\alpha}\{f(\Box)W(x)\}^2\delta(x-y)\right]dxdy\right\}$$

$$\times \det\nabla_\mu^2 \prod_x \delta(\nabla_\mu q_\mu) dW dq_\mu + O(\varepsilon). \qquad (4.20)$$

由于泛函 $Z_0(\mathscr{A})$ 实际上不依赖于 ε，我们可以在（4.20）式中置 ε 为零，其结果最后一项消失．

（4.20）和（4.8）式不同之处在于指数函数的指数中的 q_μ 由

$$q_\mu + \nabla_\mu M^{-1}(W - \partial_\rho q_\rho) \qquad (4.21)$$

代替．我们来证明，这样做的结果产生的附加图形对应于收敛的积分．为此利用由作用量 S_A 的规范不变性所产生的关系式[注]

[注] 原书下式右方为 $\partial S_A/\delta A_\mu^a(y)$，——译者

$$\int \frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}[\nabla_\mu\varphi(x)]^b dx = gt^{abc}\frac{\delta S_A}{\delta A_\nu^a(y)}\varphi^c(y), \quad (4.22)$$

这一关系式使我们能将（4.20）式中的指数改写为

$$\frac{1}{2}\int\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}q_\mu^a(x)q_\nu^b(y)dxdy + gt^{abc}\int\frac{\delta S_A}{\delta A_\nu^a(x)}$$

$$\times\left[q_\nu + \frac{1}{2}\nabla_\nu M^{-1}(W-\partial_\rho q_\rho)\right]^b\left[M^{-1}(W-\partial_\rho q_\rho)\right]^c dx. \quad (4.23)$$

容易看到，（4.23）式中的第二项只产生收敛图形。的确，q_μ 的传播子在 q 大时的行为是 g^{-6}，而W的传播子减小得不比这慢．因此，将（4.23）式中的第二项所产生的顶角插到任何图形中都会使它成为有限．特别是，这一项在质壳上的贡献一般说来等于零．

这样，我们证明了，（4.7）式的发散部分（我们将用 $Z_0'(\mathscr{A})$ 表示它）可以变成（4.8）式的形式。现在让我们来检验这一表达式的规范不变性．

为此注意，在对 q_μ 积分时，可将 $Z_0'(\mathscr{A})$ 写成

$$Z_0'(\mathscr{A}) = \det Q_0^{-1/2}\det\nabla_\mu^2, \quad (4.24)$$

其中

$$\det Q_0^{-1/2} = \int\exp\left\{i\int\left[\frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}q_\mu^a(x)q_\nu^b(y)\right]dxdy\right\}$$

$$\times\prod_x\delta(\nabla_\mu q_\mu)dq_\mu. \quad (4.25)$$

泛函 $\det\nabla_\mu^2$ 是明显规范不变的．在场 $\mathscr{A}_\mu$ 的规范变换之下，导数 $\delta^2 S_A/\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)$ 逆变换．由 S_A 的不变性可见

$$\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)} = \frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu'^c(x)\delta A_\nu'^d(y)}$$

$$\times(\delta^{ac}\delta^{bd} - gt^{caf}u^f(x)\delta^{bd} - gt^{bdf}u^f(y)\delta^{ac} + \cdots), \quad (4.26)$$

因此，如果在规范变换 $\mathscr{A}_\mu \to \mathscr{A}_\mu^\omega$ 的同时，改变积分变量

$$q_\mu \to \omega q_\mu\omega^{-1}, \quad (4.27)$$

则（4.25）式将保持不变。这样，最后得到

$$Z_0'(\mathscr{A}^{\omega})=Z_0'(\mathscr{A}). \tag{4.28}$$

正规化就是作代换

$$Z_0'(\mathscr{A})\longrightarrow \det Q_0^{-1/2}\prod_j \det Q_j^{-c_j/2}\det B_0 \det B_j^{c_j}. \tag{4.29}$$

其中

$$\det B_j=\det\{\nabla_\mu^2-\mu_j^2\}$$
$$=\int\exp\left\{-\frac{i}{2}\operatorname{tr}\int[\bar{b}\nabla_\mu^2 b-\mu_j^2\bar{b}b]dx\right\}\prod_x d\bar{b}db. \tag{4.30}$$

$$\det Q_j^{-1/2}=\int\exp\left\{i\iint\left[\frac{1}{2}\int\frac{\delta^2 S_A}{\delta A_\mu^a(x)\delta A_\nu^b(y)}q_\mu^a(x)q_\nu^b(y)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\mu_j^2}{2}q_\mu^2(x)\delta(x-y)\right]dxdy\right\}\prod_x\delta(\nabla_\mu q_\mu)dq_\mu. \tag{4.31}$$

变量 b 和 $\bar{b}$ 被假定为反对易的，而系数 c_j 满足泡利-维拉条件

$$\sum c_j+1=0;\quad \sum c_j\mu_j^2=0,$$
$$\text{在 }\mu_j=0\text{ 时，}B_0=B_j,\quad Q_0=Q_j. \tag{4.32}$$

(4.29)式描述了通常的泡利-维拉正规化，这在前面曾经以旋量场为例子详细讨论过。从每一个有矢量（q_μ）和标量（b）粒子传播的闭合环中减除了内线有质量 μ_j 的类似的环。根据(4.32)式，在被积函数渐近表达式中的带头项消去，而积分变得收敛。由于$Z_0(\mathscr{A})$和$Z_0'(\mathscr{A})$只相差有限的项，类似的步骤显然将$Z_0(\mathscr{A})$也正规化。

因子 $\det Q_j$ 和 $\det B_j$ 是规范不变的。$\det B_j$ 的不变性可以直接从（4.30）式中得到。在指数中出现的有效作用量描述了标量场 $\bar{b}$，b 和杨-米尔斯场的规范不变的相互作用。因此

$$\det B_j(\mathscr{A}^{\omega})=\det B_j(\mathscr{A}). \tag{4.33}$$

泛函 $\det Q_j$ 的不变性可以和泛函 $\det Q_0$ 的不变性同样地证明。这样，(4.29) 式确实是规范不变的。

我们现在能写出格林函数的完全正规化了的生成泛函的明显形式。它是：

$$Z_\Lambda(J_\mu)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int \mathrm{tr}\left[\frac{1}{8}F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}+\frac{1}{8\Lambda^4}\nabla^2\mathscr{F}_{\mu\nu}\nabla^2\mathscr{F}_{\mu\nu}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{4\alpha}[f(\square)\partial_\mu\mathscr{A}_\mu]^2-\frac{1}{2}\mathscr{J}_\mu\mathscr{A}_\mu\right]dx\right\}$$

$$\times\det M\prod_j\det Q_j^{-c_j/2}\det B_j^{c_j}\prod_x d\mathscr{A}_\mu. \qquad (4.34)$$

利用（4.30），（4.31）和第三章(3.51)式可以将这一表达式表示成 exp $\{i\times$局域作用量$\}$对杨-米尔斯场和辅助场 $\bar{c},c,q_\mu,\bar{b},b$ 的路径积分。

我们也可以通过在（4.34）式中引进，例如

$$\frac{1}{2\alpha}(\nabla^2q_\mu^a)^2 \qquad (4.35)$$

这样的规范固定项来过渡到广义协变规范。此时，行列式 $\det B_0$ 和 $\det B_j$ 也要作相应的修改。我们在这里不讨论它。

对于有限的 Λ，μ_j，由 Z_Λ 产生的所有图形都收敛。与此同时，Z_Λ 具有和未正规化的泛函所形式上具有的同样的变换性质。特别是，正如我们在下面将看到的，广义瓦德恒等式对它也成立。

§4.5 维数正规化

发散指数 ω 在很大程度上依赖于时空维数。对于维数为 n 的空间，独立微分对于图形指数的贡献等于

$$n(L-m+1), \qquad (5.1)$$

其中，L 是内线数，而 m 是顶角数。因此，在 4 维空间中对应于发散积分的图形，在一个维数小些的空间中可以变成收敛的。另一方面，由 4 维空间过渡到 n 维空间不影响对称性质。规范变换能够自然地推广到任何有正维数的空间中。我们还可以更进一步，对于维数为非整数，甚至为复数的空间中定义费曼图。在此

情况下，自然不能谈到拉氏量的任何对称性，因为这一概念本身在非整数 n 的情况下失去了意义。然而，我们能够在任意维数的空间中研究格林函数。正像我们在下面将要看到的，用格林函数表出的规范不变性，等效于在这些函数之间存在一种被称为是广义瓦德恒等式的关系。这些关系在任意维数的空间中都有意义，而在能使所有的积分都收敛的维数 n 的区域中，这些关系可以严格地证明。格林函数作为空间维数 n 的函数，在 $n=4$ 处有 极 点型奇异性。减除掉这种奇异性，就能够将格林函数解 析 延 拓 到 $n=4$。这样得到的函数将满足广义瓦德恒等式。

作为一个最简单的例子，考虑积分

$$I=\int d^n k\frac{1}{(k^2-m^2+i0)[(p-k)^2-m^2+i0]},\tag{5.2}$$

当 n 为小于 4 的整数时，这一积分收敛。利用公式

$$\frac{1}{ab}=\int_0^1\frac{dx}{[ax+b(1-x)]^2},\tag{5.3}$$

可以将它改写为

$$I=\int_0^1 dx\int d^n k\frac{1}{[k^2+p^2x(1-x)-m^2+i0]^2}.\tag{5.4}$$

将回路旋转90°，并改变积分变量 $k_0\to ik_0$，我们得到对 n 维欧氏空间的积分

$$I=i\int_0^1 dx\int d^n k\frac{1}{[k^2+m^2-p^2x(1-x)]^2}.\tag{5.5}$$

对 k 的积分可以用已知的公式

$$\int\frac{d^n k}{(k^2+c)^a}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}c^{\frac{n}{2}-a}\Gamma\left(a-\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(a)}\tag{5.6}$$

来计算，其中$\Gamma(a)$是欧勒(Euler)的 Γ 函数。(5.6)式的右边可以解析延拓到 n 的复数值。我们将用(5.6)式作为左边的积分 在 任意空间维数时的定义。这样，(5.2)式变为

$$I = i\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)\int_0^1 dx[m^2-p^2x(1-x)]^{\frac{n}{2}-2}, \tag{5.7}$$

在$n=4$时，Γ函数有极点，而I趋于无穷。这对应于原始的4维空间积分的发散。和通常一样，这一发散用减除来消去。将I围绕$\frac{n}{2}=2$的点展开成洛朗(Laurent)级数，我们有

$$I = \frac{i\pi^2}{\frac{n}{2}-2} - \gamma + i\pi^2\int_0^1 dx\ln[m^2-p^2(1-x)x] + O\left(\frac{n}{2}-2\right). \tag{5.8}$$

其中，γ是一个有限的常数。在$\lambda^2=p^2$点作减除，得到如下形式的最终结果

$$\bar{I}(p^2,\lambda^2) = i\pi^2\int_0^1 dx\ln\frac{m^2-p^2x(1-x)}{m^2-\lambda^2x(1-x)}. \tag{5.9}$$

为了计算任意的费曼图，还需要说明在n维空间中处理张量对象的规则。按定义

$$g_{\mu\nu}p_\nu = p_\mu;\quad p_\mu p_\mu = p^2;\quad g_{\mu\nu}g_{\nu\alpha} = \delta_{\mu\alpha};\quad g_{\mu\nu}g_{\mu\nu} = n. \tag{5.10}$$

类似地，对于包含费米子的理论，引进了具有γ矩阵代数性质的对象：

$$\gamma_\mu\gamma_\nu + \gamma_\nu\gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}I, \tag{5.11}$$

其中I是单位矩阵，而

$$\mathrm{tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = 2^{\frac{n}{2}}g_{\mu\nu}, \tag{5.12}$$

$$\gamma_\mu\hat{p}\gamma_\mu = 2\left(1-\frac{n}{2}\right)\hat{p},\quad \gamma_\mu\hat{p}\hat{q}\gamma_\mu = 4pq + (n-4)\hat{p}\hat{q}. \tag{5.13}$$

然而应注意，通常对矩阵γ_5的定义

$$\gamma_5 = \frac{1}{4!}\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu\gamma_\nu \tag{5.14}$$

不能用到任意维数的空间中，因为完全反对称张量$\varepsilon_{\alpha\beta\mu\nu}$只定义在4维空间中。正因为这样，包含有$\gamma_5$矩阵的理论需要加以特殊的考虑，一般说来，维数正规化对它们不适用。

对任意费曼图进行维数正规化的办法如下。设与图形相应的积分是

$$F=\prod_{j=1}^{l}\int d^n k_j (k_{l_1})_\lambda (k_{l_2})_\mu \cdots (k_{l_n})_\nu \prod_{i=1}^{L}(q_i^2-m_i^2+i0), \qquad (5.15)$$

其中，L是图形的内线数，l是独立的循环数，动量q_i表示积分变量k_i与外线动量p_i的代数和。有必要采用一种对格林函数的参数化，使得对k_i的积分可以明显地算出来。为此既可以用(5.3)式，也可以用所谓的α表示

$$(p^2-m^2+i0)^{-1}=(i)^{-1}\int_0^{\infty} d\alpha \ \ \exp\{i\alpha(p^2-m^2+i0)\}, \qquad (5.16)$$

过渡到α表示以后，对k的积分成为高斯型的，可以利用下述公式算出：

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n}\exp(-xk^2+2k^a)=\left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{n}{2}}(2\pi)^{-n}\exp\left\{\frac{a^2}{x}\right\}, \qquad (5.17)$$

对于非整数n，(5.17)式被看成是n维空间中的积分的定义。

在复变量n的一个有限的区域中，函数F中的积分收敛。在$n=4$时，这一函数有极点(在实际计算中，这些极点呈现为对参数α积分所产生的Γ函数的奇异性)。

利用(5.10)式分析出张量结构以后，函数F可以表示为一些标量函数F_i之和。如果相应的图形没有发散子图，则函数F_i围绕$n=4$点的洛朗展开有以下形式

$$F_i(p)=\frac{A(p_i^2,p_ip_j)}{n-4}+B(p_i^2,p_ip_j)+O(n-4), \qquad (5.18)$$

其中$A(p_i^2,p_ip_j)$是方次等于图形指数的一个多项式。

从函数$F_i(p)$中减除掉它按动量p_j的泰勒级数展开的头几项，我们就得到一个可以解析延拓到$n=4$的函数。

对于包含发散子图的图形，减除可以相继地进行。引进能够从子图中去掉发散的抵消项，然后对整个图形进行减除。维数正

规化的一个重要性质是能够在正规化的积分内部将积分变量平移。根据这一性质及张量代数(5.10)式，使得我们能够在维数正规化的框架内证明广义瓦德恒等式。

最后，我们用一个简单例子来说明维数正规化方法——计算杨-米尔斯场格林函数的二级修正。这一修正由图 4 中的图形描述。

在对角 a 规范中，和图(a)对应的正规化积分是

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a = & -\frac{g_1^2}{2}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\varepsilon^{aa_1c_2}\varepsilon^{bb_1b_2}\\ & \times[(p+k)_{\mu_2}g_{\mu\mu_1}+(p-2k)_\mu g_{\mu_1\mu_2}+(k-2p)_{\mu_1}g_{\mu\mu_2}]\\ & \times[(k+p)_{\nu_2}g_{\nu\nu_1}+(k-2p)_{\nu_1}g_{\nu\nu_2}+(p-2k)_\nu g_{\nu_1\nu_2}]\\ & \times\frac{(-i\delta^{a_1b_1})}{k^2+i0}g_{\mu_1\nu_1}\frac{(-i\delta^{a_2b_2})}{(p-k)^2+i0}g_{\mu_2\nu_2}\\ & = g_1^2\delta^{ab}\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\Big\{g_{\mu\nu}[(k+p)^2+(k-2p)^2]\\ & +(n-6)p_\mu p_\nu+(4n-6)k_\mu k_\nu+(3-2n)\\ & \times(p_\nu k_\mu+p_\mu k_\nu)\Big\}\Big\{(k^2+i0)\\ & \times[(p-k)^2+i0]\Big\}^{-1},\end{aligned}\tag{5.19}$$

其中，为了保持 $\Pi_{\mu\nu}$ 的正确的因次，引进了一个带因次的耦合常数 $g_1^2=g^2\mu^{4-n}$。

利用公式

$$\frac{1}{k^2(p-k)^2}=\int_0^1 dz\frac{1}{[k^2(1-z)+(p-k)^2z]^2},\tag{5.20}$$

并过渡到新变量

$$k\longrightarrow k+pz,\tag{5.21}$$

可以将(5.19)公式写成

$$\begin{aligned}\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a = & g_1^2\delta^{ab}\int_0^1 dz\frac{d^nk}{(2\pi)^n}[g_{\mu\nu}(5-2z+2z^2)p^2+2g_{\mu\nu}k^2\\ & +(4n-6)k_\mu k_\nu-(4n-6)z(1-z)p_\mu p_\nu\\ & +(n-6)p_\mu p_\nu][k^2+p^2z(1-z)+i0]^{-1}.\end{aligned}\tag{5.22}$$

在此式中去掉了 k 的奇次项，因为由于对称性的原因，它们的贡献为零。过渡到欧氏度规就能用下式算出对 k 的积分：

$$\int \frac{(k^2)^m d^n k}{[k^2+p^2 z(1-z)]^l} = \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\infty} dk^2 \frac{(-k^2)^m (k^2)^{\frac{n}{2}-1}}{[-k^2+p^2 z(1-z)]^l}$$

$$= \frac{i\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^{m+l} [-p^2 z(1-z)]^{m+\frac{n}{2}-l}$$

$$\times \frac{\Gamma\left(m+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(l-\frac{n}{2}-m\right)}{\Gamma(l)}. \tag{5.23}$$

对于一个非整数的或复数的 n，这一公式就是(5.23)式左边积分的定义。做出积分，我们得到

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(p)_a = \frac{ig_1^2 \delta^{ab}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 dz \{[g_{\mu\nu}(5-2z+2z^2)p^2$$

$$-(4n-6)p_\mu p_\nu z(1-z) + (n-6)p_\mu p_\nu]$$

$$\times [-p^2 z(1-z)]^{\frac{n}{2}-2}\, \Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)$$

$$-3(n-1)g_{\mu\nu}[-p^2 z(1-z)]^{\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\left(1-\frac{n}{2}\right). \tag{5.24}$$

对 z 的积分可以用下式算出：

$$\int_0^1 dz z^{m-n-1}(1-z)^{m-k-1} = \frac{\Gamma(m-n)\Gamma(m-k)}{\Gamma(2m-n-k)}, \tag{5.25}$$

其结果得到

$$\Pi^{ab}_{\mu\nu}(p)_a = \frac{ig_1^2}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \delta^{ab} \left\{ g_{\mu\nu} p^2 \left[5 \frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n-2)} \right.\right.$$

$$-2\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n-1)} + 2\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n)}$$

$$+\frac{6(n-1)}{2-n}\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\Bigg]-p_\mu p_\nu\Bigg[(4n-6)\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}$$

$$-(n-6)\frac{\Gamma^2\left(\frac{n}{2}-1\right)}{\Gamma(n-2)}\Bigg]\Bigg\}\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(-p^2)^{\frac{n}{2}-2}. \quad (5.26)$$

在推导这一公式时，应用了下述关系

$$\Gamma(1-\omega)=\frac{1}{(1-\omega)}\Gamma(2-\omega). \quad (5.27)$$

我们看到，由于函数$\Gamma(2-n/2)$在$n=4$有极点，所以当$n\to4$时

$$\Pi_{\mu\nu}(p)_a\to\infty.$$

将$\Pi_{\mu\nu}(p)_a$在$n=4$周围展开成洛朗级数，并考虑到

$$\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)^\varepsilon=1+\varepsilon\ln\left(\frac{\mu^2}{-p^2}\right)+O(\varepsilon^2), \quad (5.28)$$

得到$\Pi_{\mu\nu}(p)_a$的最终表达式：

$$\Pi^{a\,b}_{\mu\,\nu}(p)_a=\frac{ig^2\delta^{ab}}{6\pi^2}\Bigg\{(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\left(\frac{19}{6}\varepsilon^{-1}+c_a\right)$$

$$-\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(d+\varepsilon^{-1})+(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\frac{19}{6}\ln\frac{\mu^2}{-p^2}$$

$$-\frac{1}{2}p_\mu p_\nu\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\Bigg\},$$

$$\varepsilon=\frac{4-n}{2}, \quad (5.29)$$

其中c_a和d是有限的常数。

积分

$$\Pi^{a\,b}_{\mu\,\nu}(p)_b=-2g_1^2\int\frac{d^nk}{(2\pi)^n}\frac{k_\mu(k-p)_\nu}{k^2(p-k)^2}\delta^{ab} \quad (5.30)$$

和图(b)对应。完全和以上相似地计算给出

$$\Pi^{a\,b}_{\mu\,\nu}(p)_b=\frac{ig^2}{16\pi^2}\delta^{ab}\Bigg\{(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\left(\frac{1}{6}\varepsilon^{-1}+c_b\right)$$

$$+\frac{1}{2}p_\mu p_\nu(\varepsilon^{-1}+d)+(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\frac{1}{6}\ln\frac{\mu^2}{-p^2}$$

$$+\frac{1}{2}p_\mu p_\nu\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\Big\}. \tag{5.31}$$

最后，图(c)的贡献为零。这一图形的贡献正比于积分

$$I=\int\frac{d^4k}{k^2}, \tag{5.32}$$

在维数正规化方法中成立公式

$$I=\int\frac{d^nk(k^2)^{\alpha-1}}{(2\pi)^n}=0;\qquad \alpha=0,1,\cdots,m. \tag{5.33}$$

这样，对杨-米尔斯场格林函数的总的二级修正有以下形式：

$$\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)=\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_a+\Pi_{\mu\nu}^{ab}(p)_b$$

$$=\frac{ig^2\delta^{ab}}{16\pi^2}(g_{\mu\nu}p^2-p_\mu p_\nu)\left\{\frac{10}{3}\varepsilon^{-1}+c+\frac{10}{3}\ln\frac{\mu^2}{-p^2}\right\}. \tag{5.34}$$

和通常一样，$\varepsilon\to0$时的发散用减除法消去。相应的抵消项等于

$$(z_2-1)=\frac{5g^2}{24\pi^2}\varepsilon^{-1}+c, \tag{5.35}$$

和§4.1中的(1.33)式相符。可以看到，表达式(5.34)自动地是横向的，为了消去发散，不需要象杨-米尔斯场质量重整化的抵消项那样一种非规范不变的抵消项。

§4.6 广义瓦德恒等式

重整化步骤通常用格林函数来表述。和S矩阵不一样，格林函数不是规范不变的对象，它们的值依赖于所选择的特殊的规范条件。相对性原理等效于在格林函数之间存在着一些关系；类比于电动力学，我们称这种关系为广义瓦德恒等式。这种关系提供了不同规范的物理等效性，并在证明重整化S矩阵的规范不变性和么正性时起关键作用。特别是，由它们可知，为消除去掉中间正规化后出现的发散所需要的抵消项有规范不变的结构。

我们先对正规化的未重整格林函数推导广义瓦德恒等式．在所有以下的论证中，所需要用的只是正规化作用量的规范不变性．因此，我们将不写出它的明显形式，而只是记住，当需要明显形式时总是可以利用如（4.34）式那样的式子．

作为格林函数生成泛函的原始表示，可以选用

$$Z=N^{-1}\int\exp\left\{i\left[S_A-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\int\left[\frac{1}{2\alpha}(f(\Box)W(x))^2+\mathscr{T}_\mu\mathscr{A}_\mu\right]dx\right]\right\}$$
$$\times\Delta(\mathscr{A})\prod_x\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu-W)d\mathscr{A}dW. \tag{6.1}$$

这里，S_A是规范不变的作用量泛函，它包含所有的正规化因子．为了得到广义瓦德恒等式，我们将采用和证明S矩阵的规范不变性相同的方法．

让我们引进用以下条件定义的规范不变函数$\tilde{\Delta}(\mathscr{A})$：

$$\tilde{\Delta}(\mathscr{A})\int\delta\left[\partial_\mu\mathscr{A}_\mu^\omega-W(x)-\chi(x)\right]d\omega=1, \tag{6.2}$$

其中，$\chi(x)$是一个任意的矩阵函数．考虑到（6.2）式，可以改写$Z(J)$为[注]

$$Z(J)=N^{-1}\int\exp\left\{i\left[S_A-\frac{1}{2}\operatorname{tr}\int\left[\mathscr{T}_\mu\mathscr{A}_\mu+\frac{1}{2\alpha}(f(\Box)W)^2\right]dx\right]\right\}$$
$$\times\Delta(\mathscr{A})\tilde{\Delta}(\mathscr{A})\prod_x\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu-W)$$
$$\times\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu^\omega-W-\chi)d\mathscr{A}dWd\omega. \tag{6.3}$$

换成新变量

$$\mathscr{A}_\mu\longrightarrow\mathscr{A}_\mu^\omega,$$
$$\omega\longrightarrow\omega^{-1}. \tag{6.4}$$

对ω和W的积分用δ函数去掉，所出现的雅可比行列式和$\Delta(\mathscr{A})$相消．

[注] 原书下式的被积函数中，和$f(\Box)$相乘的为小写w．——译者

考虑到泛函 $\tilde{\Delta}(\mathscr{A})$ 在表面

$$\partial_\mu \mathscr{A}_\mu = W + \chi \tag{6.5}$$

上的值等于泛函 $\Delta(\mathscr{A})$ 在表面

$$\partial_\mu \mathscr{A}_\mu = W \tag{6.6}$$

上的值，我们得到[注]

$$Z(J) = N^{-1}\int \exp\left\{ i\left[S_A - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\int\left[\mathscr{G}_\mu \mathscr{A}_\mu^\omega + \frac{1}{2\alpha}\Big(f(\Box)(\partial_\mu \mathscr{A}_\mu - \chi)\Big)^2\right]dx\right]\right\} \det M \prod_x d\mathscr{A}. \tag{6.7}$$

这里

$$\mathscr{A}_\mu^\omega = \mathscr{A}_\mu + \partial_\mu u - g[\mathscr{A}_\mu, u] + O(u^2), \tag{6.8}$$

而 $u(x)$ 满足方程

$$\Box u - g\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu, u] + O(u^2) = W - \partial_\mu \mathscr{A}_\mu = -\chi. \tag{6.9}$$

将解 u 表示成 χ 的级数，我们有

$$u = -M^{-1}\chi + O(\chi^2), \tag{6.10}$$

其中，M^{-1} 是M的逆算符，这一算符的核 $M_{ab}^{-1}(x,y)$ 满足方程

$$\Box M_{ab}^{-1}(x,y) - g t^{adc}\partial_\mu(A_\mu^d(x) M_{cb}^{-1}(x,y)) = \delta^{ab}\delta(x-y), \tag{6.11}$$

它显然就是虚构粒子在经典外场 $\mathscr{A}_\mu(x)$ 中的格林函数的连接部分：

$$M_{ab}^{-1}(x,y) = \delta^{ab} D^0(x-y) + g t^{adb}\int D^0(x-z)\partial_\mu\Big[A_\mu^d(z) D^0(z-y)\Big]dz + \cdots. \tag{6.12}$$

因为（6.1）式与 χ 无关，它对 χ 的导数等于零

$$\left.\frac{dZ}{d\chi}\right|_{\chi=0} = 0. \tag{6.13}$$

将由（6.1）式进行恒等变换得到的（6.7）式代入此式，并明显地算出微分，得到[注]

〔注〕原书下式中无最后一个方括号. ——译者

$$\int \exp\left\{ i\left[S_A + \int\left[J_\mu^a A_\mu^a + \frac{1}{2\alpha}(f(\Box)\partial_\mu A_\mu)^2 \right] dx \right]\right\} \det M$$
$$\times \left\{ \frac{1}{\alpha} f^2(\Box)\partial_\mu A_\mu^a(y) \right.$$
$$\left. + \int J_\mu^b(z)(\nabla_\mu^z M^{-1})^{ba}(z,y,\mathscr{A})dz \right\} \prod_x d\mathscr{A} = 0. \qquad (6.14)$$

这一等式就是杨-米尔斯理论的广义瓦德恒等式。它也可以写成变分导数的形式

$$\left\{ \frac{1}{\alpha} f^2(\Box)\partial_\mu \left\{ \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J_\mu^a(x)} \right\} \right.$$
$$\left. + \int J_\mu^b(y)\left[\nabla_\mu^y \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) M_{yx}^{-1}\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J} \right) \right]^{ba} dy \right\} Z = 0, \qquad (6.15)$$

其中，算符 $\nabla_\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)$ 和 $(M^{-1})^{ba}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)$ 由 $\nabla_\mu(\mathscr{A})$ 和 $(M^{-1})^{ab}(x,y,\mathscr{A})$ 通过代换

$$A_\mu^a \to \frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu^a} \qquad (6.16)$$

而得到。

将算符 M^{-1} 作用到 $Z(J)$ 上，得到虚构粒子在存在经典源 J 时的总格林函数：

$$(M^{-1})_{xy}^{ab}\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J} \right] Z(J) = G^{ab}(x,y,J)$$
$$= -\frac{\delta^2}{\delta\bar\eta^a(x)\delta\eta^b(y)} N^{-1} \int \exp\left\{ -i\frac{\mathrm{tr}}{2}\left[\bar c\partial_\mu\nabla_\mu c + \mathscr{L}_{YM} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \bar c\eta + \bar\eta c + \mathscr{T}_\mu\mathscr{A}_\mu \right] dx \right\} \prod_x d\bar c dc d\mathscr{A} \Big|_{\bar\eta=\eta=0}. \qquad (6.17)$$

这一函数满足方程

$$\partial_\mu^x \nabla_\mu^{ab}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J} \right) G^{bc}(x,y,J) = \delta^{ac}\delta(x-y)Z(J). \qquad (6.18)$$

由广义瓦德恒等式（6.15）式容易得到不同格林函数之间的关系。例如，算出（6.15）式在 $J=0$ 点对 $J^b_\nu(y)$ 的变分导数，并将所得结果对 y_ν 求导，得到

$$\frac{-i}{a}f^2(\Box)\partial^x_\mu\partial^y_\nu\left[\frac{\delta^2 Z}{\delta J^a_\mu(x)\delta J^b_\nu(y)}\right]_{J=0}$$

$$= -\partial^y_\nu\left\{\nabla^y_\nu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)G_{yx}\right\}^{ba}_{J=0} = -\delta^{ab}\delta(x-y). \quad (6.19)$$

变分导数

$$\frac{1}{i}\frac{\delta^2 Z}{\delta J^a_\mu(x)\delta J^b_\nu(y)}\bigg|_{J=0} \quad (6.20)$$

正好就是杨-米尔斯场的二点格林函数 $G^{ab}_{\mu\nu}(x,y)$。（6.19）式表明，完全的格林函数的纵向部分

$$G^L_{\mu\nu}(x-y)=\partial_\mu\partial_\nu\Box^{-2}\partial_\rho\partial_\sigma G_{\rho\sigma}(x-y) \quad (6.21)$$

等于自由格林函数的纵向部分

$$G^L_{\mu\nu}=D^L_{\mu\nu}=-\delta^{ab}\frac{a}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}\frac{k_\mu k_\nu}{k^4 f^2(-k^2)}dk. \quad (6.22)$$

这样，完全和电动力学相似，对于格林函数的纵向部分不存在辐射修正。对于三点和四点函数的相应的恒等式看起来比电动力学中复杂得多，因为它们里面包含有虚构粒子的格林函数。

由广义瓦德恒等式可以得到结论，从格林函数中去掉发散所需要的抵消项之间存在着关系。例如，从（6.19）式可见，和波函数纵向部分的重整化对应的抵消项等于零。可以证明，如果格林函数满足广义瓦德恒等式，则抵消项形成一个规范不变的结构。为了证明这一点，可以直接分析（6.15）式，也可以过渡到单粒子不可约格林函数的类似的恒等式。这样就证明了，重整化不破坏理论的规范不变性。然而，更简单的是采用另一种办法，从一开始就在拉氏量中放进最普遍形式的规范不变的抵消项，然后用广义瓦德恒等式证明，在这样一个理论中，所有的格林函数在

中间正规化去掉时都趋向一个有限的极限。这正是我们在下一节中所要做的事。

现在让我们对杨-米尔斯场与标量场φ和旋量场ψ相互作用的情况推出广义瓦德恒等式。

在此情况下，格林函数的生成泛函可以写成

$$Z(J,\zeta,\bar{\eta},\eta)=N^{-1}\int\exp\Big\{i\Big[S_A+\int\Big[\frac{1}{2\alpha}(f(\Box)W)^2$$
$$+J_\mu^a A_\mu^a+\zeta^i\varphi^i+\bar{\psi}^k\eta^k+\bar{\eta}^k\psi^k\Big]dx\Big\}$$
$$\times\Delta(\mathscr{A})\prod_x\delta(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu-W)d\mathscr{A}dWd\varphi d\bar{\psi}d\psi. \tag{6.23}$$

规范不变的正规化作用量也包含描述旋量场与标量场相互作用的项。

前面给出过的所有论证可以自动地应用于这一情况。唯一的差别在于，除了（6.4）式之外，有必要过渡到新的场φ^ω，ψ^ω

$$\varphi\to\varphi^\omega,\quad\psi\to\psi^\omega \tag{6.24}$$

其结果，在所得到的泛函的指数中出现附加的项[注]

$$\delta_\chi(\zeta^i\varphi^i+\bar{\psi}^k\eta^k+\bar{\eta}^k\psi^k)=\zeta^i\delta_\chi\varphi^i+\delta_\chi\bar{\psi}^k\eta^k+\bar{\eta}^k\delta_\chi\psi^k \tag{6.25}$$

而广义瓦德恒等式有以下形式

$$\int\exp\Big\{i\Big[S_A+\int\Big[A_\mu^a J_\mu^a+\zeta^i\varphi^i+\bar{\psi}^j\eta^j+\bar{\eta}^j\psi^j+\frac{1}{2\alpha}$$
$$\times(f(\Box)\partial_\mu A_\mu^a)^2\Big]dx\Big\}\det M\Big\{\frac{1}{\alpha}f^2(\Box)\partial_\mu A_\mu^a(y)$$
$$+\int\Big[J_\mu^b(z)[\nabla_\mu^z M^{-1}(z,y,\mathscr{A})]^{ba}+\zeta^i(z)\frac{\delta_\chi\varphi^i(z)}{\delta\chi^a(y)}\Big|_{\chi=0}$$
$$+\frac{\delta_\chi\bar{\psi}^k(z)}{\delta\chi^a(y)}\Big|_{\chi=0}\eta^k(z)+\bar{\eta}^k(z)\frac{\delta_\chi\psi^k(z)}{\delta\chi^a(y)}\Big|_{\chi=0}\Big]dz\Big\}=0. \tag{6.26}$$

[注] 原书下式右方最后一项为$\delta\psi^k$。——译者

这一形式的广义瓦德恒等式对于对称的理论和有自发对称性破缺的理论都适用。差别只在于标量场的规范变换 φ^{ω} 的明显形式。如果 φ 实现生成元为 Γ^c 的规范群 Ω 的一个表示，

$$\delta\varphi^a = g(\Gamma^c)^{ab}\varphi^b u^c + O(u^2), \tag{6.27}$$

则（6.26）式可以写成以下形式（略去旋量场）

$$\frac{1}{\alpha} f^2(\Box)\partial_\mu^x\left[\frac{1}{i}\frac{\delta Z}{\delta J_\mu^a(x)}\right]$$
$$+\int\left[J_\mu^b(y)\left\{\nabla_\mu\left[\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right]G(y,x,J,\zeta)\right\}^{ba}\right.$$
$$\left.+g\zeta^b(y)(\Gamma^d)^{bc}\frac{1}{i}\frac{\delta G^{da}(y,x,J,\zeta)}{\delta\zeta^c(y)}\right]dy = 0. \tag{6.28}$$

在自发破缺对称性的情况下，（6.27）式修改成

$$\delta\varphi^a = g(\Gamma^c)^{ab}\varphi^b u^c + g(\Gamma^c)^{ab} r^b u^c + O(u^2), \tag{6.29}$$

其中，r^b 是一个常矢量，它可以不失普遍性地被看成是指向编号为 $\bar{b}$ 的轴：$r^b = r\delta^{b\bar{b}}$。相应地，在（6.28）式中出现附加项

$$rg\int\zeta^b(y)(\Gamma^d)^{b\bar{b}}G^{da}(y,x,J,\zeta)dy. \tag{6.30}$$

例如，对于复 $SU(2)$ 二重态的标量场模型［第一章(3.25)

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} iB_1(x)+B_2(x)\\ \sqrt{2}\mu+\sigma(x)-iB_3(x)\end{pmatrix}, \tag{6.31}$$

式］规范变换有下述形式：

$$\delta\sigma = \frac{-g}{2}(B^a u^a),$$

$$\delta B^a = -m_1 u^a - \frac{g}{2}\varepsilon^{abc}B^b u^c - \frac{g}{2}\sigma u^a, \tag{6.32}$$

$$m_1 = \frac{g\mu}{\sqrt{2}}.$$

广义瓦德恒等式成为

$$\frac{1}{\alpha}f^2(\Box)\partial_\mu\left[\frac{1}{i}\frac{\delta Z}{\delta J^a_\mu(x)}\right]+\int\left\{\left[J^b_\mu(y)\nabla^{bd}_\mu\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)\right.\right.$$

$$-\zeta_\sigma(y)\frac{g}{2}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\zeta^d_B(y)}-\zeta^b_B(y)\left(\frac{g}{2}\varepsilon^{bcd}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\zeta^c_B(y)}\right.$$

$$\left.\left.\left.+\delta^{bd}\frac{g}{2}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\zeta_\sigma(y)}+m_1\delta^{bd}\right)\right]G^{da}(y,x,J,\zeta)\right\}dy=0. \quad (6.33)$$

在结束这一节的时候，我们来证明，广义瓦德恒等式(6.14)式表述了量子杨-米尔斯场有效拉氏量的某种在经典情况下所没有的相加对称性。所谓有效拉氏量指的是第三章（3.54）式中的指数上的表达式。这一表达式除了经典杨-米尔斯拉氏量以外，还包含规范固定项和虚构场的拉氏量。

让我们明显地引入虚构粒子的场，将格林函数的生成泛函写成对 exp{$i\times$局域作用量} 的路径积分形式[注]：

$$Z=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}+\frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2+\bar{c}^aM^{ab}c^b\right.\right.$$

$$\left.\left.+J^a_\mu A^a_\mu+\bar{c}^a\eta^a+\bar{\eta}^ac^a\right]dx\right\}\prod_x d\mathscr{A}d\bar{c}dc. \quad (6.34)$$

在此式中，除了杨-米尔斯场的源以外，我们还为虚构场引进了反对易的源 $\bar{\eta}$，η。(6.34) 式对应于规范条件的一个确定的选择（为了简单起见，我们考虑 $f(\Box)=1$ 的情况）。因此，指数中的有效作用量不是规范不变的。然而，存在一种既影响杨-米尔斯场，又影响虚构场 $\bar{c}$，c 的变换，对于这类变换，有效拉氏量是不变的。这类变换有如下形式：

$$A^a_\mu(x)\longrightarrow A^a_\mu(x)+[\nabla_\mu c(x)]^a\varepsilon, \quad (6.35)$$

$$c^a(x)\longrightarrow c^a(x)-\frac{1}{2}t^{abd}c^b(x)c^d(x)\varepsilon, \quad (6.36)$$

$$\bar{c}^a(x)\longrightarrow\bar{c}^a(x)+\frac{1}{\alpha}[\partial_\mu A^a_\mu(x)]\varepsilon. \quad (6.37)$$

[注] 原书下式中无$J^a_\mu A^a_\mu$。——译者

这里，ε是一个与x无关的参量，并且是格拉斯曼代数的元素：

$$\varepsilon^2=0;\quad \varepsilon c+c\varepsilon=0;\quad \varepsilon\bar{c}+\bar{c}\varepsilon=0;\quad [\varepsilon,\mathscr{A}_\mu]=0. \tag{6.38}$$

(我们提醒一下，虚构场 $\bar{c}$，c 也是反对易变量)。这样一种可对易量和反对易量不平凡地混合起来的变换被称为是超对称变换.

让我们来验证（6.34）式中的有效拉氏量在(6.35)～(6.37)式变换之下的不变性. 变换（6.35）式是规范变换的一个特殊情况，因此它使（6.34）式指数中的第一项不变. 不难验证，变分$\delta(\nabla_\mu c)$也等于零. 实际上

$$\delta(\nabla_\mu c)^a=-\frac{1}{2}t^{abd}[\partial_\mu(c^bc^d)-A_\mu^bt^{def}c^ec^f]\varepsilon$$
$$-t^{abd}(\partial_\mu c^b-t^{bef}A_\mu^ec^f)\varepsilon c^d. \tag{6.39}$$

由c^f、c^d的反对易性得到[注]

$$t^{abd}t^{bef}c^fc^d=\frac{1}{2}t^{abd}t^{def}c^ec^f, \tag{6.40}$$

因此，(6.39)式的右边等于零. 这样，有效拉氏量总变分等于：

$$\delta\mathscr{L}_{eff}=\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A_\mu^a\partial_\nu(\nabla_\nu c)^a\varepsilon-\frac{1}{\alpha}\partial_\mu A_\mu^aM^{ab}c^b\varepsilon, \tag{6.41}$$

根据算符M的定义可以看出，这一表达式等于零.

(6.35) 式到 (6.37) 式没有任何明显的几何意义，而有效拉氏量对这种变换的不变性并不和任何可观测量的守恒相联系. 然而，由它可以得到一些有用的结论；特别是，可以用它来给出广义瓦德恒等式的另一证明.

为此，在（6.34）式中，作（6.35）至（6.37）式积分变量的代换. 这一变换的雅可比行列式可以形式地写为

[注] 下式在左边乘A_μ^e右边乘A_μ^b后相等. ——译者

$$J=\det\begin{pmatrix}\delta_{\mu\nu}\delta^{ab} & \nabla_{\mu}^{ab}\varepsilon & 0\\ 0 & \delta^{ab}-t^{adb}c^{d}\varepsilon & 0\\ \delta^{ab}\dfrac{1}{\alpha}\varepsilon\partial_{\mu} & 0 & \delta^{ab}\end{pmatrix}, \tag{6.42}$$

它显然等于 1．因此，代换的结果，(6.35) 到 (6.37) 式只改变了带有源的项．明显地写出它们的变分，并且令导数 $dZ/d\varepsilon$ 等于零，我们得到关系式

$$0=\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_{eff}+J_{\mu}^{a}A_{\mu}^{a}+\bar{c}^{a}\eta^{a}+\bar{\eta}^{a}c^{a}\right]dx\right\}$$
$$\times\left\{J_{\mu}^{b}(y)\left[\nabla_{\mu}c(y)\right]^{b}-\frac{1}{\alpha}\partial_{\mu}A_{\mu}^{a}(y)\eta^{a}(y)\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\bar{\eta}^{a}(y)t^{abd}c^{b}(y)c^{d}(y)\right\}dy\prod_{x}d\mathscr{A}d\bar{c}dc, \tag{6.43}$$

由此很容易推出广义瓦德恒等式 (6.14) 式．将等式 (6.43) 对 η 微分，并令 $\bar{\eta}$，$\eta=0$，得到

$$0=\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_{eff}+J_{\mu}^{a}A_{\mu}^{a}\right]dx\right\}\left\{-\frac{1}{\alpha}\partial_{\mu}A_{a}^{a}(y)\right.$$
$$\left.+\int\bar{c}^{a}(y)J_{\mu}^{b}(z)[\nabla_{\mu}c(z)]^{b}dz\right\}\prod_{x}d\mathscr{A}d\bar{c}dc. \tag{6.44}$$

利用 (6.17) 式完成对 $\bar{c}$, c 的积分，正好得到恒等式(6.14) 式．类似地可以在杨-米尔斯场与物质场相互作用的情况下得到广义瓦德恒等式．

到此为止，我们只考虑了在实际计算中常常采用的协变 α 规范．然而，所有的论证自动地适用于更普遍的情况，即规范固定项有以下形式的情况：

$$B(\mathscr{A})=\exp\left\{\frac{i}{2}\int\Phi^{2}(\mathscr{A},x)dx\right\}, \tag{6.45}$$

其中 $\Phi(\mathscr{A})$ 是 $\mathscr{A}(x)$ 的一个泛函，它在原则上除了 $\mathscr{A}$ 的线性项之外，还可以包含更高次项．在此情况下，按照第三章中讲过

的普遍的量子化步骤，格林函数生成泛函中的算符M由第一章的(1.26)式给出：

$$M_{\Phi}a=\int\frac{\partial\Phi(\mathscr{A},x)}{\partial A_{\mu}(y)}\nabla_{\mu}a(y)dy。\qquad(6.46)$$

在此情况下，为了得到广义瓦德恒等式，只需要在本节开始所作的全部计算中作代换

$$\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\mu}\longrightarrow\Phi(\mathscr{A}),$$
$$M\longrightarrow M_{\Phi}。\qquad(6.47)$$

其结果，代替（6.14）式，得到

$$\int\exp\left\{i\int\left\{S_{A}+\left[-\frac{1}{2}\Phi^{2}(\mathscr{A})+J_{\mu}^{a}A_{\mu}^{a}\right]dx\right\}\det M_{\Phi}\right.$$
$$\times\left\{\Phi^{a}(\mathscr{A},y)+\int J_{\mu}^{b}(z)(\nabla_{\mu}^{x}M_{\Phi}^{-1})^{ba}(z,y,\mathscr{A})dz\right\}\prod_{x}d\mathscr{A}=0。\qquad(6.48)$$

§4.7 重整化作用量的结构

让我们来分析杨-米尔斯理论中的原始发散图的结构。我们将从真空中的杨-米尔斯场开始。在a规范中，有效拉氏量有以下形式：

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left\{\frac{1}{4}[(\partial_{\nu}\mathscr{A}_{\mu}-\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\nu})+g[\mathscr{A}_{\mu},\mathscr{A}_{\nu}]]^{2}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2a}(f(\Box)\partial_{\mu}\mathscr{A}_{\mu})^{2}+\bar{c}\Box c-g\bar{c}-g\bar{c}\partial_{\mu}[\mathscr{A}_{\mu},c]\right\}.$$
$$(7.1)$$

图形规则包含下列元素：

1．矢量粒子线$\overset{\frown}{\mathscr{A}_{\mu}\mathscr{A}_{\nu}}$，虚构$c$粒子线$\overset{\frown}{\bar{c}\ c}$。与这些线对应的是自由格林函数$D_{\mu\nu}(p)$和$D(p)$，它们在$p\to\infty$的渐近行为是$p^{-2}$。

2．带有三条矢量线，有一个导数的顶角。

3．带有四条矢量线而没有导数的顶角。

4. 带有一条矢量线，两条虚构粒子线，有一个导数的顶角.

按照§4.2中推导的普遍公式，包含n_3个三腿矢量顶角、n_4个四腿顶角、n_c个有虚构粒子腿的顶角、$L_{内}$条矢量内线以及$L_{内}^c$条虚构粒子内线的图形的指数等于

$$\omega = 2L_{内} + 3L_{内}^c - 4(n_4 - 1) - 3(n_3 + n_c). \tag{7.2}$$

考虑到内线数（$L_{内}, L_{内}^c$）和外线数（$L_{外}$）的关系

$$\begin{aligned} L_{内} &= \frac{4n_4 + 3n_3 + n_c - L_{外}}{2}, \\ L_{内}^c &= \frac{2n_c - L_{外}}{2}, \end{aligned} \tag{7.3}$$

可以把图形指数用外线数表示

$$\omega = 4 - L_{外} - L_{外}^c. \tag{7.4}$$

由此公式可见，杨-米尔斯场在α规范中的微扰论级数只包含有限种类型的原始发散图。这些图形画在图9上（形式上还存在一个含有两条矢量外线和两条虚构外线的对数发散图以及一个有四条虚构线的发散图。然而，从(7.1)式可见，某一顶角上的导数可以通过分部积分转移到c粒子外线上。因而相应的图形实际上是收敛的）。

图9(a)和(b)的指数为2，图9(c)和(d)的指数是1，而图(e)的指数是0。由于和前面相同的原因，具有c粒子外线的图形的实际指数要减少1。此外，由于洛仑兹不变性的原因，指数等于1的所有图形实际上只是对数发散。

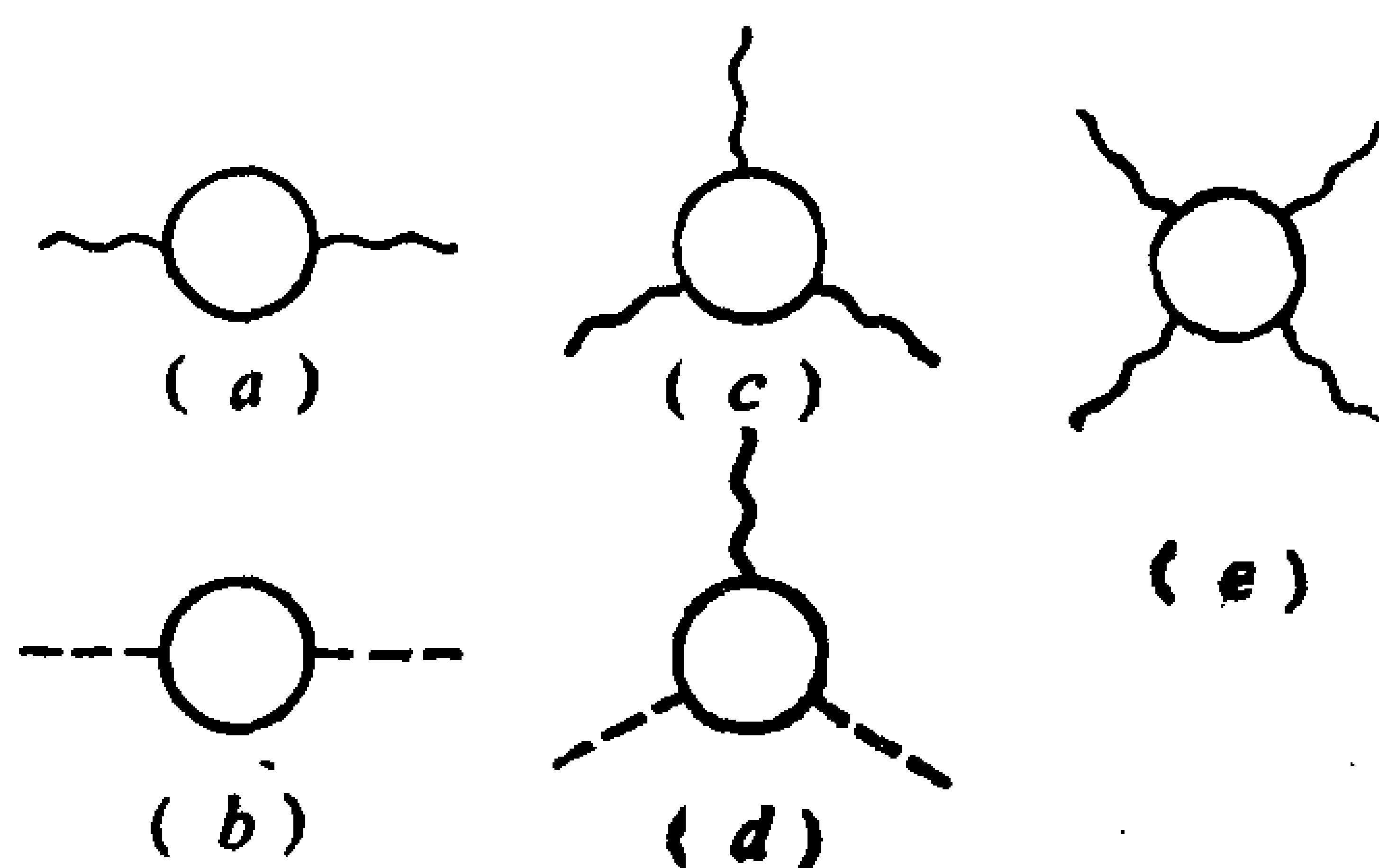


图9 杨-米尔斯理论中发散图的类型

按照消去这类发散的一般步骤，需要从相应的顶角函数中减除按外动量的泰勒级数展开的式子中的几个领头项。通常选择这样一个点作为展开的中心，在这一点处，外动量在质壳上，因为这一选择保证了单粒子态的恰当的归一化。然而，当所考虑的系统中包含有零质量粒子时，质壳上的顶角函数会由于相应的积分在坐标原点发散而产生附加的奇异性（红外灾难）。因此，我们在所有外动量之值都在欧氏区域中的那种点上进行减除。例如，对于有 n 个外动量 p_i 的顶角，这些点是

$$p_i^2=-a^2;\quad p_ip_j=\frac{a^2}{n-1}. \tag{7.5}$$

在这种点上，所有顶角函数都是实的，而且没有红外奇异性。

现在来写出，能和相对论不变性以及玻色对称性相容的减除项的最普遍表达式。与图 9 中的图形相对应的正规顶角函数有下列结构：

$$\left.\begin{aligned}
\Gamma_{\mathcal{A}\mathcal{A}}(p)&\equiv\Gamma^{a\,b}_{\mu\,\nu}(p)=\delta^{ab}\{b_1g_{\mu\nu}+b_2p_\mu p_\nu\\
&\qquad+b_3(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu)\}+\cdots,\\
\Gamma_{\bar{c}c}(p)&\equiv\Gamma^{ab}(p)=\delta^{ab}b_4p^2+\cdots,\\
\Gamma_{\mathcal{A}^3}&\equiv\Gamma^{l\,m\,n}_{\lambda\,\nu\,\rho}(p,k,q)=i\varepsilon^{lmn}b_5\{g_{\lambda\nu}(p-k)_\rho\\
&\qquad+g_{\nu\rho}(k-q)_\lambda+g_{\lambda\rho}(q-p)_\nu\}+\cdots,\\
\Gamma_{\mathcal{A}\bar{c}c}&\equiv\Gamma^{l\,mn}_{\mu}(p,k,q)=\frac{i}{2}\varepsilon^{lmn}b_6(k-q)_\mu+\cdots,\\
\Gamma_{\mathcal{A}^4}&\equiv\Gamma^{i\,l\,m\,n}_{\mu\,\nu\,\rho\,\lambda}(p,k,q,r)=P\{b_7\varepsilon^{gil}\varepsilon^{gmn}g_{\mu\rho}g_{\nu\lambda}\\
&\qquad+b_8\delta^{il}\delta^{mn}g_{\mu\nu}g_{\lambda\rho}\}+\cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{7.6}$$

（这里写出了 $SU(2)$ 群的顶角函数。在此情况下，电荷指标的张量结构局限于张量 ε^{abc} 和 δ^{ab}。在一般情况下，会出现附加的线性独立的结构，例如在 $SU(3)$ 群情况下，会出现正比于对称张量 d^{abc} 的项。以下给出的重整化的证明在这种情况下仍然有效）。

在最后一个式子中，P 是成对指标 (i,μ)、(l,ν)、(m,ρ)、(n,λ) 的对称化算符。系数 b_i 依赖于正规化参数 Λ，μ，以及减

除点a_i；省略号…表示泰勒展开式的后续项，它们在正规化去掉时趋向有限的极限。

减除（7.6）式等效于在有效拉氏量中插入下述抵销项：

$$\Delta\mathscr{L}=\frac{1}{4}\mathrm{tr}\Big\{b_1\mathscr{A}_\mu^2+b_2(\partial_\mu\mathscr{A}_\mu)^2+\frac{b_3}{2}(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)^2$$
$$-2b_4\bar{c}\Box c+b_5(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]$$
$$+b_6\bar{c}\partial_\mu[\mathscr{A}_\mu,c]+\frac{b_7}{2}[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu][\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]\Big\}$$
$$+\frac{b_8}{16}\mathrm{tr}\{(\mathscr{A}_\mu\mathscr{A}_\mu)\}^2. \tag{7.7}$$

为了消去发散所需要的抵销项类型的数目是有限的，因此这一理论可重整。然而，(7.7)式比原始拉氏量包含多得多的参数。在参数b_i取任意值时，重整化的理论不是规范不变的，不满足相对性原理，而这就使得不同规范之间的等效性丧失，其结果破坏了么正性。

在中间正规化固定的时候，参量b_i的值依赖于减除点a_i的选择。我们将证明，这一任意性使我们能够选择参量b_i来让重整化理论变成规范不变的。

让我们来弄清楚相对性原理对重整化有效拉氏量加了什么限制。首先注意，杨-米尔斯拉氏量乘上常数并不破坏它的规范不变性。而且，我们可以任意地对待起荷的作用的参量g。换句话说，杨-米尔斯场的规范不变拉氏量的最普遍表达式是

$$\mathscr{L}=\frac{z_2}{8}\mathrm{tr}\{(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)+gz_1z_2^{-1}[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]\}^2. \tag{7.8}$$

对于这一拉氏量，起规范变换参量作用的是常数$\tilde{g}$：

$$\tilde{g}=gz_1z_2^{-1}. \tag{7.9}$$

同一参量必须包含在协变导数的定义中，以保证理论的自洽性。特别是，在按式

$$M=\partial_\mu\nabla_\mu=\partial_\mu(\partial_\mu-g[\mathscr{A}_\mu,\quad]) \tag{7.10}$$

定义的算符M中，必须用常数$\tilde{g}$来代替g．将$\det M(\tilde{g})$写成对虚构粒子场积分的形式

$$\det M(\tilde{g}) = 常数 \times \int \exp\left\{\frac{-i\operatorname{tr}}{2}\int \tilde{z}_2 \bar{c} \partial_\mu (\partial_\mu c - \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} g \times [\mathscr{A}_\mu, c]) dx\right\} \prod_x d\bar{c} dc, \tag{7.11}$$

其中

$$\tilde{z}_2^{-1} \tilde{z}_1 = z_2^{-1} z_1, \tag{7.12}$$

而且我们又一次利用了将整个拉氏量乘上一个任意常数的办法．这样就得到了容许的有效拉氏量的最普遍表达式

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_R = \frac{1}{2}\operatorname{tr}\Big\{&\frac{1}{4} z_2 [(\partial_\nu \mathscr{A}_\mu - \partial_\mu \mathscr{A}_\nu) + z_1 z_2^{-1} g \\ &\times [\mathscr{A}_\mu, \mathscr{A}_\nu]]^2 - \frac{1}{2\alpha}(f(\Box)\partial_\mu \mathscr{A}_\mu)^2 - \tilde{z}_2 (\bar{c}\Box c \\ &- \tilde{z}_1 \tilde{z}_2^{-1} g \bar{c} \partial_\mu [\mathscr{A}_\mu, c])\Big\}.\end{aligned} \tag{7.13}$$

常数z_1，z_2，$\tilde{z}_1$，$\tilde{z}_2$由（7.12）式相联系．熟悉的条件$z_1 = z_2$不是必需的，而且一般说来，并不成立。拉氏量（7.13）式和未重整拉氏量有相同的结构，与后者的差别在于场$\mathscr{A}_\mu$，$\bar{c}$，c，荷g以及规范参量α的相乘重整化：

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}_\mu \longrightarrow z_2^{1/2} \mathscr{A}_\mu, \quad c \longrightarrow \tilde{z}_2^{1/2} c, \quad \bar{c} \longrightarrow \tilde{z}_2^{1/2} \bar{c}, \\ &g \longrightarrow z_1 z_2^{-3/2} g, \quad \alpha \longrightarrow z_2 \alpha.\end{aligned} \tag{7.14}$$

和普遍表达式（7.7）式不一样，这一拉氏量只包含三个独立的抵销项，初看起来，并不是显然可以看出靠它们的帮助就能去掉所有的发散．

通过引进不变的中间正规化，有可能为对应于（7.13）式的格林函数$Z_R(J)$构造一个生成泛函．假定这一正规化已经用§4.3节中介绍的高阶协变导数方法做出．由于在下面的全部论证中都只需要用到正规化作用量的不变性，我们不明显地写出正规化项，而只是记住这种项可以用例如（4.34）式来描述．

对于（7.13）式，起规范变换参量作用的是常数 $\tilde{g}=z_1z_2^{-1}g$。因此，$Z_R(J)$ 所满足的广义瓦德恒等式和（6.15）式的差别在于，在算符 M^{-1} 和 ∇_μ 中用 $\tilde{g}$ 代替 g：

$$\frac{1}{\alpha}f^2(\Box)\partial_\mu^x\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)}\right\}+\left\{\int J_\mu^b(y)\left[\delta^{bd}\partial_\mu^y\right.\right.$$

$$\left.\left.-gt^{bcd}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J_\mu^c(y)}\right]\times\widetilde{M}_{y\,x}^{-1\,da}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J}\right)dy\right\}Z_R=0. \quad (7.15)$$

其中 M^{-1} 上的符号～表示，在这一算符的定义中所包含的常数 g 用 $\tilde{g}$ 代替。

在这一公式中换用由下式定义的虚构粒子重整化格林函数是方便的[注]。

$$G_R^{da}(y,x,J)=N^{-1}\int\bar{c}^d(y)c^a(x)\exp\left\{i\iint\left[\tilde{z}_2\bar{c}^i(s)\Box c^i(s)\right.\right.$$

$$-\tilde{z}_1t^{ikl}g\bar{c}^i(s)\partial_\mu[A_\mu^k(s)c^l(s)]+\mathscr{L}_R^{YM}(s)$$

$$\left.\left.+A_\mu^aJ_\mu^a\right]ds\right\}\prod_x d\mathscr{A}\,d\bar{c}\,dc. \quad (7.16)$$

为此注意，

$$\widetilde{M}_{y\,x}^{-1\,ab}Z_R=N^{-1}\int\bar{c}^a(y)c^b(x)\exp\left\{i\iint\left[c^a(s)\Box c^a(s)\right.\right.$$

$$-\tilde{z}_2^{-1}\tilde{z}_1gt^{abd}\bar{c}^a(s)\partial_\mu[A_\mu^b(s)c^d(s)]+\mathscr{L}_R^{YM}(s)$$

$$\left.\left.+A_\mu^aJ_\mu^a\right]ds\right\}\prod_x d\mathscr{A}\,d\bar{c}\,dc=\tilde{z}_2^{-1}G_R^{ab}(y,x,J). \quad (7.17)$$

这一式子可以从（7.16）式通过代换

$$c\longrightarrow\tilde{z}_2^{-1/2}c, \qquad \bar{c}\longrightarrow\tilde{z}_2^{-1/2}\bar{c} \quad (7.18)$$

而得到。

将（7.15）式右边的源 J_μ 表示为

$$J_\mu=J_\mu^{tr}+\partial_\mu\Box^{-1}\partial_\nu J_\nu,$$

[注] 原书下式中第一个 $\bar{c}^i(s)$ 前面也是 $\tilde{z}_1$。——译者

并利用

$$\partial^y_\mu(\nabla_\mu(\mathscr{Y})\tilde{M}^{-1})^{ab}_{yx}=\delta^{ab}\delta(x-y), \tag{7.19}$$

可以将这一关系式改写为

$$\frac{1}{a}f^2(\square)\partial^x_\mu\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta Z_R}{\delta J^a_\mu(x)}\right\}=\left\{\int D_0(x-y)\partial_\mu J^a_\mu(y)dy\right\}Z_R$$

$$+\int J^{cb}_\mu(y)g\tilde{z}_1 t^{bcd}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^c_\mu(y)}G^{da}_R(y,x,J)dy. \tag{7.20}$$

我们来证明，当常数 z_2，$\tilde{z}_2$，$\tilde{z}_1$ 选择得合适时，从恒等式(7.20)可以得到所有格林函数都有限的结论。用归纳法证明。假定只到 n 阶为止的所有图形都是有限的，我们要证明（7.20）式右边的泛函 F 到$n+1$阶是有限的。由此就可以证明，泛函

$$\partial^x_\mu\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta Z_R}{\delta J^a_\mu(x)}\right\} \tag{7.21}$$

也是直到$n+1$阶都有限。我们将看到，这意味着所有的格林函数都是有限的（有可能除了杨-米尔斯场和虚构粒子的二点格林函数 Γ_{AA} 和 $\Gamma_{\bar{c}c}$ 以外），它们的发散用重整化常数 z_2 和 $\tilde{z}_2$ 消去，这些常数的选择可以由我们自己确定。

在杨-米尔斯场格林函数的纵向部分在动量大时下降快的规范中，也就是，当包含在广义 α 规范的定义中的函数 $f(k^2)$的渐近行为是 $k^{2n}(n>1)$ 时，证明特别简单（当然，这也包含 $D_{\mu\nu}$ 的纵向部分等于零的洛仑兹规范（$\alpha=0$）本身）。

对任意规范的证明并不包含原则上新的观念，但是很繁。为了不让技术上的细节分散读者的注意力，我们将首先考虑

$$f(k^2)\xrightarrow[k^2\to\infty]{}k^{2n},\quad n\geqslant 1$$

的情况，然后在以后研究格林函数对规范的依赖性时再回过头来讨论更一般的规范。

在对g^2的最低级中，只有两点函数 Γ_{AA}和$\Gamma_{\bar{c}c}$ 发散。在二级中的正规顶角函数 $\Gamma_{AA}\equiv\Gamma^{mn}_{\mu\nu}(k)$ 和格林函数 $G^{ab}_{\mu\nu}(k)$ 由下式相联系

$$G^{ab}_{\alpha\beta}(k)=D^{am}_{\alpha\mu}(k)\Gamma^{mn}_{\mu\nu}(k)D^{nb}_{\nu\beta}(k)+D^{ab}_{\alpha\beta}(k). \tag{7.22}$$

从恒等式（7.20）得到

$$\frac{f^2(-k^2)}{\alpha}k^\alpha k^\beta G^{a\ b}_{\alpha\ \beta}(k) = \frac{\alpha k_\mu}{k^2}\Gamma^{a\ b}_{\mu\ \nu}(k^2)$$

$$\times\frac{k_\nu}{k^2 f^2(-k^2)} + \delta^{ab} = \delta^{ab}, \tag{7.23}$$

亦即，函数 $\Gamma^{a\ b}_{\mu\ \nu}(k)$ 是横的

$$\Gamma^{a\ b}_{\mu\ \nu}(k) = \delta^{ab}(k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu)\,\Pi(k^2). \tag{7.24}$$

因此，在拉氏量(7.7)式中的常数 b_1 和 b_2 等于零，而为了消去发散，只要一个抵销项 $z_2^{(0)}$ 就够了。类似地，抵销项 $\tilde{z}_2^{(0)}$ 也保证了虚构粒子格林函数的有限性。

现在来证明三级顶角函数的有限性。顶角函数 $\Gamma_{\bar{c}c\mathscr{A}}$ 对应图10上画出的强连接图。如以上证明的，这些图形的指数等于零，意味着它们形式上是对数发散的。然而，不难验证，在

$$f(k^2)\xrightarrow[k\to\infty]{}|k|^{2n},\quad n\geqslant 1$$

的规范中，不存在发散。的确，图10中的图形对应的解析表达式在动量表象中表示为如下形式的项之和

$$\sim\int D(x-x_1)\partial_\nu^{x_1}\Big\{D(x_1-z_1)\partial_\rho^{z_1}[D_{\rho\mu}(z_1-z)D(z_1-y_1)]$$

$$\times\partial_\lambda^{y_1}[D_{\nu\lambda}(x_1-y_1)D(y_1-y)]\Big\}dx_1dy_1dz_1.$$

进行分部积分，很容易变换这一表达式，使得在顶点 x_1 和 y_1 上的导数或者作用在矢量格林函数上，其结果只有它的下降快的纵向部分对积分有贡献，或者作用在外线上。因此真实的发散指数减小，而图10中的图形对应的积分收敛。相应地，在所考虑的规范中，常数 $\tilde{z}_1$ 有限。

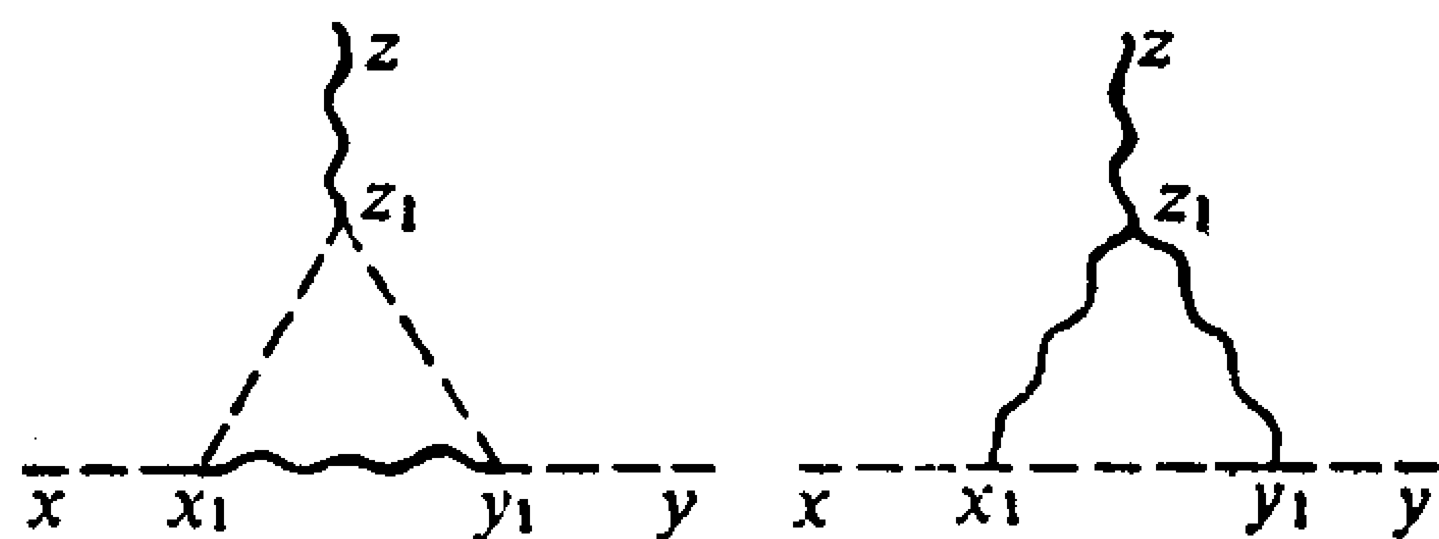


图10　顶角函数 $\Gamma_{\bar{c}c\mathscr{A}}$ 的三级修正

对于格林函数 $G^{abc}_{\mu\nu\rho}(x,y,z)$，恒等式(7.20) 给出

$$\frac{1}{a}f^2(\Box)\partial^x_\mu G^{abc}_{\mu\nu\rho}(x,y,z)=g\tilde{z}_1 t^{bed}\left(g_{\nu a}-\frac{\partial_\nu\partial_a}{\Box}\right)$$

$$\times\frac{1}{(i)^3}\left.\frac{\delta^2 G^{da}_R(y,x,J)}{\delta J^e_a(y)\delta J^c_\rho(z)}\right|_{J=0}+(b\longleftrightarrow c,\ y\longleftrightarrow z,\ \nu\longleftrightarrow\rho). \tag{7.25}$$

函数

$$\left.\frac{\delta^2 G^{da}_R(y,x,J)}{\delta J^e_a(y)\delta J^c_\rho(z)}\right|_{J=0}$$

和图11中的图形相对应。图 (*b*)、(*c*) 中的图形是弱连接的，相应的积分的收敛性由二级二点格林函数 $G^{ab}_{\mu\nu}$ 和 G^{ab} 的有限性得出。

图 (*a*) 中的图形与描述两个虚构粒子转化成一个矢量粒子的图形有类似的结构（见图10)。与后者的差别只在于它最左边的顶角在图上用一个小叉表示。在这个顶角上只有一根矢量线和一根虚构粒子线，而没有导数。图11 (*a*) 的形式上的指数为零，但是，由于和前述相同的原因，实际的指数要减少 1，从而不存在发散。

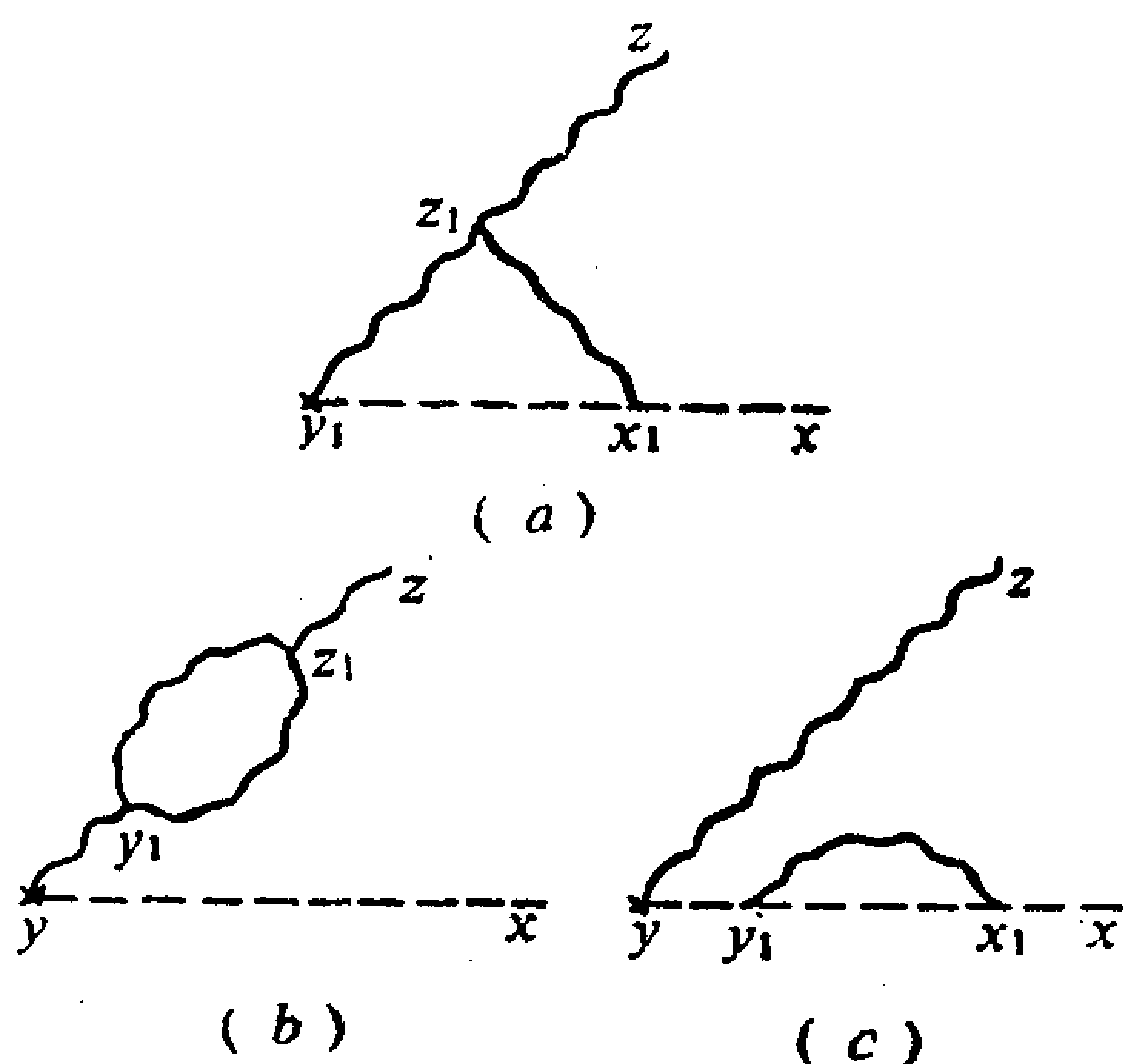


图11 和函数 $\left.\frac{\delta^2 G^{da}_R(y,x,J)}{\delta J^e_a(y)\delta J^c_\rho(z)}\right|_{J=0}$ 对应的图形

这样，(7.25) 式的右边有限，因而，函数 $\partial^x_\mu G^{abc}_{\mu\nu\rho}(x,y,z)$ 在 g 的三级也是有限的。因此，正规顶角函数 $\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}$ 的散度也是有限的。

$$(k+p)_\mu\Gamma^{abc}_{\mu\nu\rho}(k,p)<\infty. \tag{7.26}$$

$\Gamma^{a\,b\,c}_{\mu\,\nu\,\rho}(k,p)$ 的发散部分只能是一个次数不高于 1 的多项式.条件(7.26) 表明这一多项式恒等于零，而因此函数$\Gamma^{a\,b\,c}_{\mu\,\nu\,\rho}(k,p)$在 g 的三级是有限的. 为了从顶角函数 $\Gamma^{a\,b\,c}_{\mu\,\nu\,\rho}$ 中消去发散，不需要引入独立的重整化常数 z_1. 如果 $z_1=\tilde{z}_1\tilde{z}_2^{-1}z_2$，则这一函数自动地成为有限. 顶角函数在任意级的有限性可以完全类似地证明.

让我们考查 (7.20) 式右边的泛函 F. 它的连接部分画在图12上[注].设包含在这一泛函的展开式中的只到 n 级的所有图形都是有限的. 为了证明泛函 F 在第$n+1$级的有限性，只要考虑图12中的图形，其中不插入外线，同时按假定，所有的子图都有限.

图12类似于有两根虚构粒子外线和任意多根矢量外线的格林函数 $G(x,y,J)$ 的图形. 它们的差别只在于由小叉所表示的顶角的形式. 这个顶角有一根矢量线和一根虚构粒子线，而不存在导数.

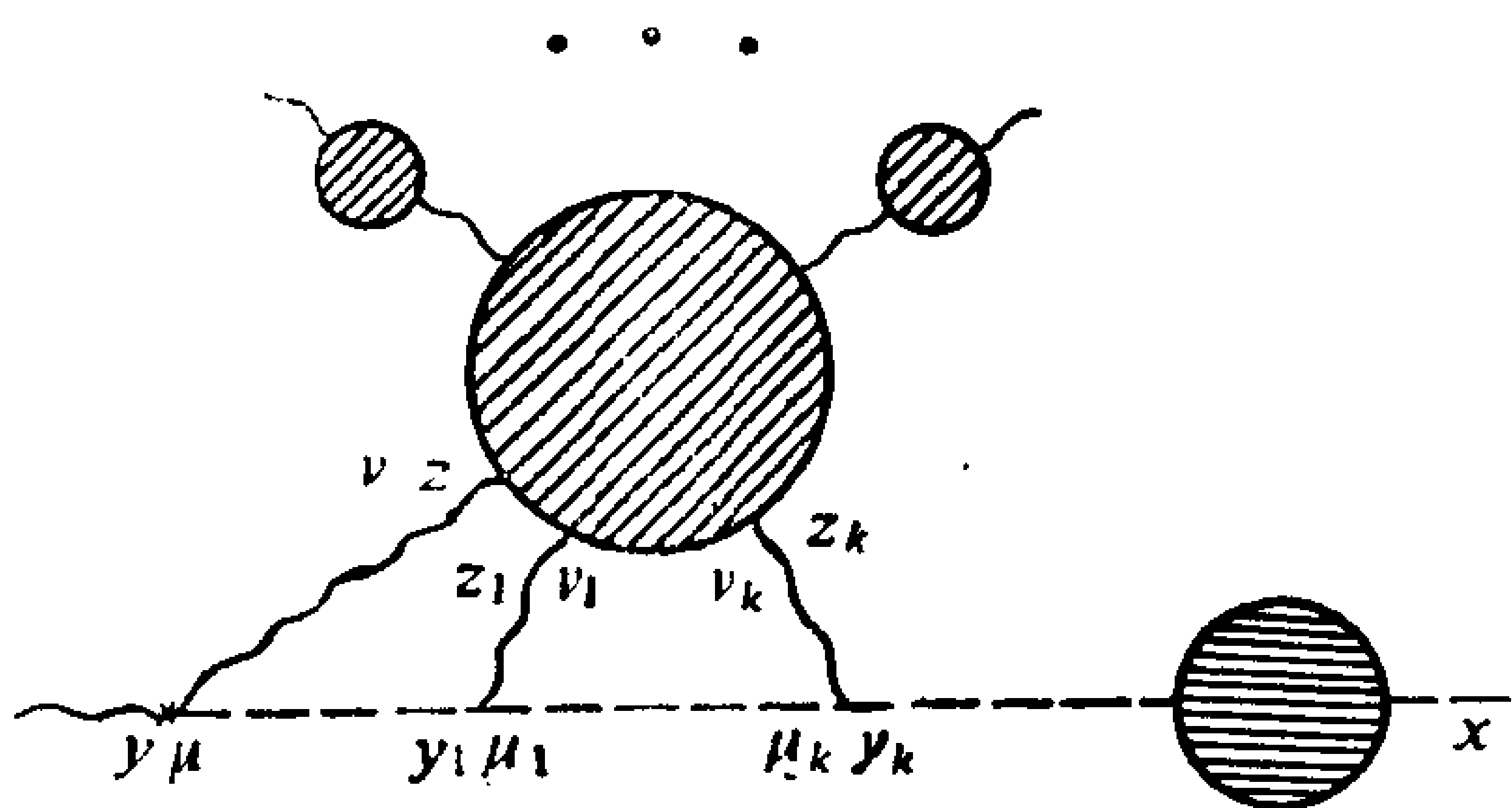


图12　外部的波线表示经典外源J_μ

因此，图12的指数和对应于 $G(x,y,J)$ 的图形的指数相同. 有两根外线的图形的指数等于 1 . 由于洛仑兹不变性的原因，对应的解析表达式有以下形式：

$$\int J^{tr}_{\mu}(y)\,\Phi_\mu(y-x)\,dy=\int J^{tr}_{\mu}(y)\,\partial_\mu\Phi(y-x)\,dy=0.$$

有三根外线的图形指数为零，原则上为对数发散，其余的图形都有负指数. 逐字重复以上对三级图所作的论证，可以得到结

[注] 原书图12上所有外线的端点处以及标有$\mu_k y_k$的地方均有表示经典外源的圆点. ——译者

论，在图12中的对数发散以及对应于顶角函数$\Gamma_{\bar{c}c\mathcal{A}}$的图形中的对数发散，的确不存在。

这样，与第n级图对应的积分收敛的假设导致了泛函F在包括$n+1$级在内的所有各级上都有限。这意味着，包含在（7.20）式左边的泛函的展开式中的所有积分也都收敛，也就是说，所有的格林函数

$$\partial^{x_1}_{\mu_1}\left\{\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{a_1}_{\mu_1}(x_1)}\cdots\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J^{a_m}_{\mu_m}(x_m)}\right\}Z_R=\partial^{x_1}_{\mu_1}G^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(x_1\cdots x_m),\tag{7.27}$$

都收敛。

函数$G^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}$的富里叶变换和顶角函数$\Gamma^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}$有关系

$$G^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(k_1\cdots k_m)=G^{a_1b_1}_{\mu_1\nu_1}(k_1)\cdots G^{a_mb_m}_{\mu_m\nu_m}(k_m)\Gamma^{b_1\cdots b_m}_{\nu_1\cdots\nu_m}(k_1\cdots k_m).\tag{7.28}$$

所有的二点函数$G^{a_ib_i}_{\mu_i\nu_i}$都是可逆的，而且含g的次数$\leqslant n$。因此，由(7.27)式的有限性得到

$$k_{\mu_1}\Gamma^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(k_1\cdots k_m)=\varphi(k_1\cdots k_m)<\infty.\tag{7.29}$$

一般说来，和顶角函数$\Gamma^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}$对应的既有强连接图又有弱连接图。和弱连图对应的系数函数在动量表象中可以表示为更低级的系数函数的乘积。这些较低级的系数函数按假定是有限的。因此，（7.29）式可以被认为是对于$n+1$级的正规顶角函数成立。

如果正规顶角函数有指数0或1，则它的发散部分只能是一个次数不高于1的多项式。条件(7.29)表明这一多项式恒等于零，因此，所有的函数$\Gamma^{a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(k_1\cdots k_m)$都有限。唯一可能的例外是杨-米尔斯场以及虚构$c$粒子场的二点格林函数。后者甚至不包含在（7.27）的展开式中，因此不受任何限制。

至于说到杨-米尔斯场的二点格林函数，由于它对应的图形有指数2，$\Gamma^{a_1a_2}_{\mu_1\mu_2}(k)$的发散部分可以是一个二次多项式。条件(7.29)不足以使一个二次多项式成为零。它对于横向部分

$$\text{常数} \times (g_{\mu\nu}k^2 - k_\mu k_\nu) \tag{7.30}$$

没有加任何限制。

然而，在我们手头还多余两个任意的 $n+1$ 级抵销项 $z_2^{(n+1)}$，$\tilde{z}_2^{(n+1)}$，它们足以从二点格林函数中消去发散性。这样，所有的 $n+1$ 级图形都是有限的。归纳法就完成了。

现在假定杨-米尔斯场也和标量场与旋量场相互作用。相应的拉氏量由第一章中（3.1)、(3.11）式给出。此时，在图形方法中，除了已经讨论过的元素外，还包含标量和旋量线，和它们相对应的有：渐近行为分别为 p^{-2} 和 p^{-1} 的格林函数 $D(p)$ 和 $S(p)$；包含两条旋量线、一根矢量线、无导数的顶角；包含两根标量线、一根矢量线和一次导数的顶角；包含两根矢量线、两根标量线而无导数的顶角。带有 $L_{外}^{A}$ 根矢量外线、$L_{外}^{c}$ 根虚构粒子外线、$L_{外}^{\varphi}$ 根标量外线和 $L_{外}^{\psi}$ 根旋量外线的图形的指数是

$$\omega = 4 - L_{外}^{A} - L_{外}^{c} - L_{外}^{\varphi} - \frac{3}{2}L_{外}^{\psi}. \tag{7.31}$$

除了已经谈到的图形之外，图13上画出的图形也有非负的指数。图 13(c) 中的标量场自能图为二次发散，图 13(a)、(d) 线性发散，剩下的图形对数发散。

相应的正规顶角函数有以下形式（为了确定起见，仍然只写出对应于 $SU(2)$ 群的公式)：

$$\left.\begin{aligned}
&\Gamma_{\bar{\psi}\psi} = (d_1 + \gamma_\mu p_\mu d_2)\delta^{ab} + \cdots, \\
&\Gamma_{\varphi\varphi} = (d_3 + d_4 p^2)\delta^{ab} + \cdots, \\
&\Gamma_{\bar{\psi}\psi A} = d_5 \gamma_\mu \varepsilon^{abc} + \cdots, \\
&\Gamma_{\varphi\varphi A} = i d_6 \varepsilon^{abc}(k-q)^\mu + \cdots, \\
&\Gamma_{\varphi\varphi AA} = d_7 g_{\mu\nu}(\delta^{ab}\delta^{cd} - \delta^{ac}\delta^{bd}) \\
&\qquad + d_8 g_{\mu\nu}(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd}) + \cdots, \\
&\Gamma_{\varphi^4} = d_9(\delta^{ab}\delta^{cd} + \delta^{ac}\delta^{bd} + \delta^{ad}\delta^{bc}) + \cdots,
\end{aligned}\right\} \tag{7.32}$$

其中"…"表示当正规化去掉时趋于有限极限的项。象真空中的杨-米尔斯场的情况一样，可能的抵销项的数目远比未正规化拉氏量中的参数要多。

规范不变的重整化拉氏量的最普遍表达式可以和前面一样构造出来，其形式为

$$\mathscr{L}^R = \mathscr{L}^R_{YM} + iz_{2\psi}\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - z_{2\psi}^{-1}z_{1\psi}gA^a_\mu\Gamma(T^a))\psi$$

$$-z_{2\psi}(m+d)\bar{\psi}\psi + \frac{1}{2}z_{2\varphi}(\partial_\mu\varphi - z_{1\varphi}z_{2\varphi}^{-1}gA^a_\mu\Gamma(T^a)\varphi)^2$$

$$-\frac{z_{2\varphi}}{2}(m^2+f)\varphi^2 + z\lambda(\varphi^2)^2, \tag{7.33}$$

其中，$\mathscr{L}^R_{YM}$ 是真空中杨-米尔斯场的拉氏量(7.13)式。

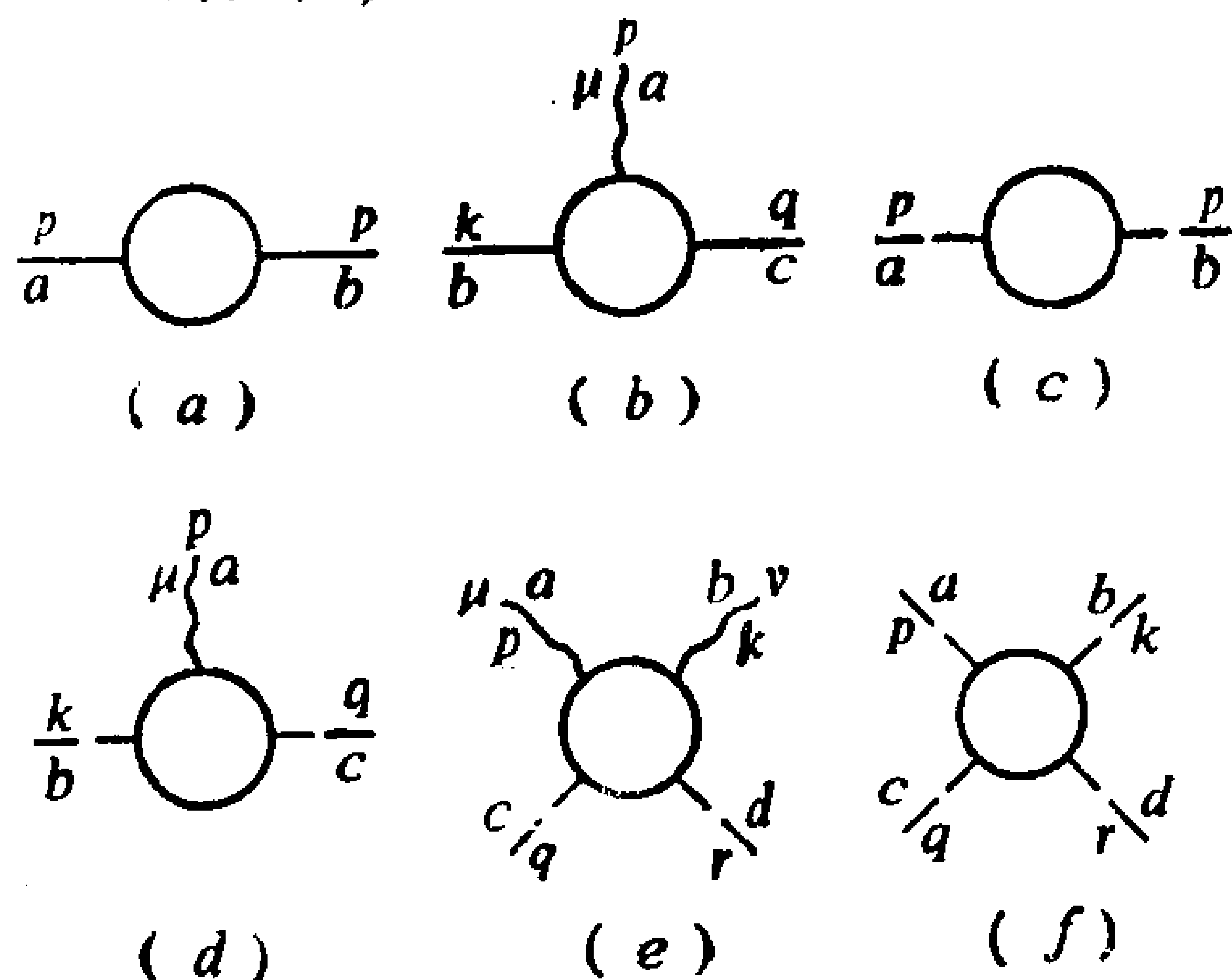


图13 在杨-米尔斯场和旋量及标量场相互作用的理论中的附加发散图形。实线表示旋量粒子，点划线表示标量粒子。

规范不变性要求，包含在旋量和标量场的协变导数中的常数 $z_{2\psi}^{-1}z_{1\psi}g$ 和 $z_{2\varphi}^{-1}z_{1\varphi}g$ 与出现在杨-米尔斯场的拉氏量中的相应常数 $\mathfrak{g}=z_2^{-1}z_1g$ 相等：

$$z_{2\psi}^{-1}z_{1\psi} = z_{2\varphi}^{-1}z_{1\varphi} = z_2^{-1}z_1. \tag{7.34}$$

和前面一样，条件 $z_{2\psi}=z_{1\psi}$ $z_{2\varphi}=z_{1\varphi}$ 不是必要的。规范不变性对于场的质量重整化抵销项 d 和 f 以及抵销项 $z\lambda(\varphi^2)^2$ 不加任何限制。我们将根据标量和旋量场的二点格林函数有限的条件来选择常数 $z_{2\psi}$ 和 $z_{2\varphi}$。

如果满足条件(7.34)，则由拉氏量(7.33)产生的格林函数

满足作了代换 $g\to\tilde{g}$ 后的广义瓦德恒等式（6.26）式。格林函数有限性的证明是逐字重复以上给出过的论证。唯一差别是，(7.20)式右边的泛函 **F** 包含一个附加项

$$\tilde{z}_1 g\int \zeta^b(y)(\Gamma^d)^{bc}\left[\frac{1}{i}\ \frac{\delta G^{da}_{yx}}{\delta\zeta^c(y)}\right]dy+\cdots, \tag{7.35}$$

其中，"…" 表示对于旋量场的类似的项。相应的图形画在图 14 上[注]。这些图形的有限性可以和图 12 中图形的有限性完全同样地证明。

剩下的全部论证和对于真空中的杨-米尔斯场的类似论证完全一样。这样，在这一情况下，为了消去全部紫外发散，也只要规范不变的抵销项就够了。

在有自发破缺对称性的理论中也不出现任何新的特点。以上所述的证明可重整性的方案保持不变。例如，考虑第一章的(3.25)式的模型。可容许的重整化拉氏量的最普遍形式可以用以下方式得到。按照前面讲过的步骤，应该将可容许的抵销项

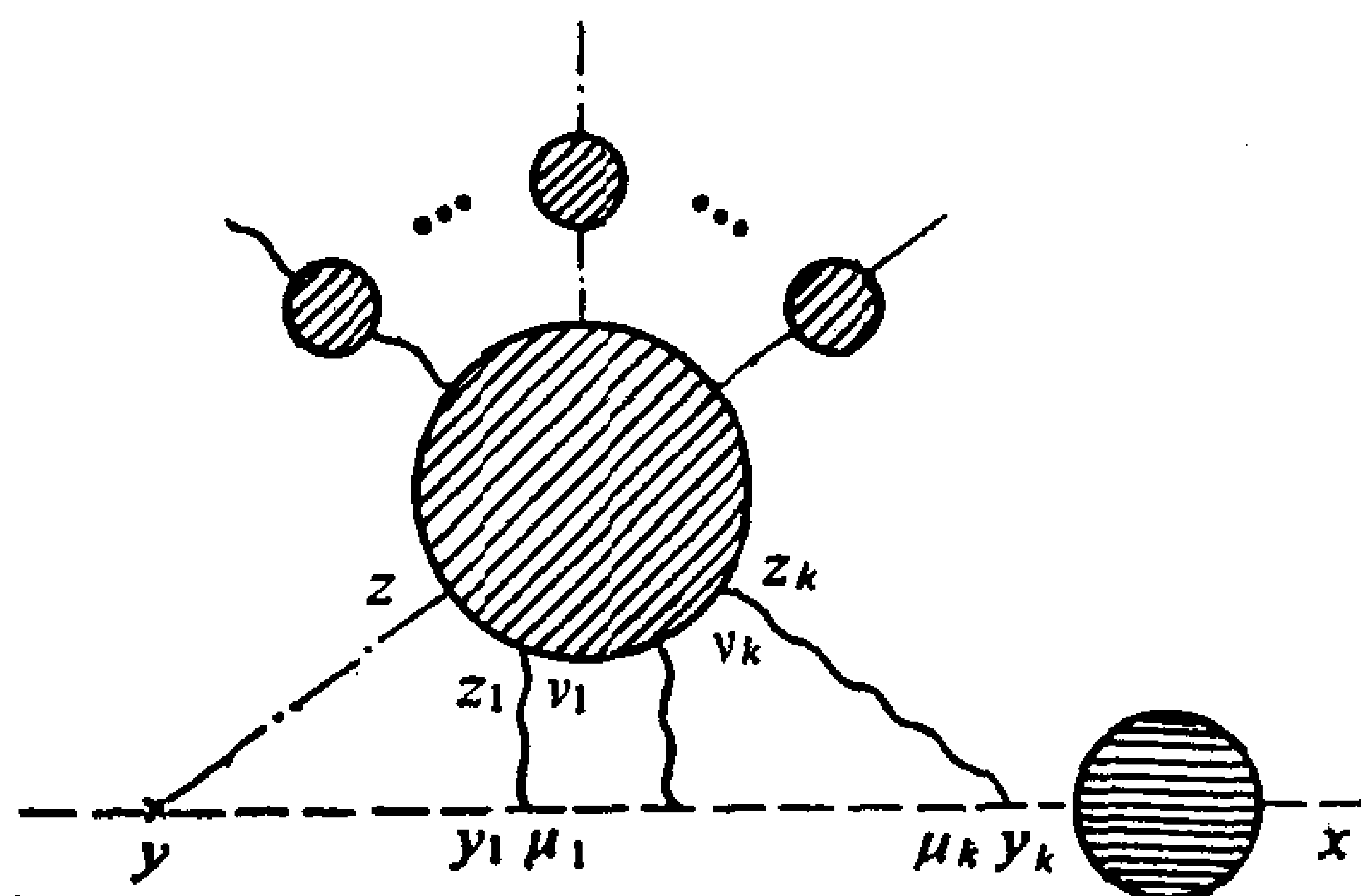


图 14

$$\mathscr{L}'=Z_{2\varphi}\left|\left(\partial_\mu\varphi^+-iZ_{1\varphi}Z_{2\varphi}^{-\frac{1}{2}}g\frac{\tau^a}{2}A^a_\mu\varphi^+\right)\right|^2$$

$$-Z\lambda^2(\varphi^+\varphi-\mu^2+\delta\mu^2)^2+\mathscr{L}^R_{YM} \tag{7.36}$$

[注] 原书每根外线的端点处均有圆点。——译者

插进[第一章(3.25)式]之中。常数 $Z_{2\varphi}$、$Z_{1\varphi}$ 满足条件(7.34)式.过渡到按(6.31)式平移的场 B^a、σ,得到:

$$\mathscr{L}_R=\frac{z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1}}{2}m_1^2A_\mu^2+z_{1\varphi}m_1A_\mu^a\partial_\mu B^a+\frac{1}{2}z_{2\varphi}\partial_\mu B^a$$

$$+\frac{1}{2}z_{2\varphi}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma-\frac{m_2^2}{2}\sigma^2-\frac{zm_2^2}{m_1^2}\frac{g^2}{8}\delta\mu^2(B^2+\sigma^2)$$

$$-\frac{zm_2^2}{m_1}\frac{g}{2}\delta\mu^2\sigma+z_{1\varphi}\frac{g}{2}A_\mu^a(\sigma\partial_\mu B^a-B^a\partial_\mu\sigma-\varepsilon^{abc}B^b\partial_\mu B^c)$$

$$+z_{1\varphi}^2z_{2\varphi}^{-1}\left[\frac{m_1g}{2}\sigma A_\mu^2+\frac{g^2}{8}(\sigma^2+B^2)A_\mu^2\right]$$

$$-\frac{zgm_2^2}{4m_1}\sigma(\sigma^2+B^2)-\frac{zg^2m_2^2}{32m_1^2}(\sigma^2+B^2)^2. \qquad (7.37)$$

重整化杨-米尔斯场的拉氏量(包括和虚构粒子的相互作用)保持不变,我们将不写出它.

在得到(7.37)式时,我们将场 φ 平移了一个量,它等于场 φ 不考虑辐射修正的真空平均值。因此,在(7.37)式中存在一个对场 σ 线性的抵销项,它和"蝌蚪"型的图(图15)中的发散相消,同时也存在一个哥德斯通场 B^a 的质量重整化抵销项.为了保证基态在考虑到辐射修正后的稳定性,这些抵销项是必要的.

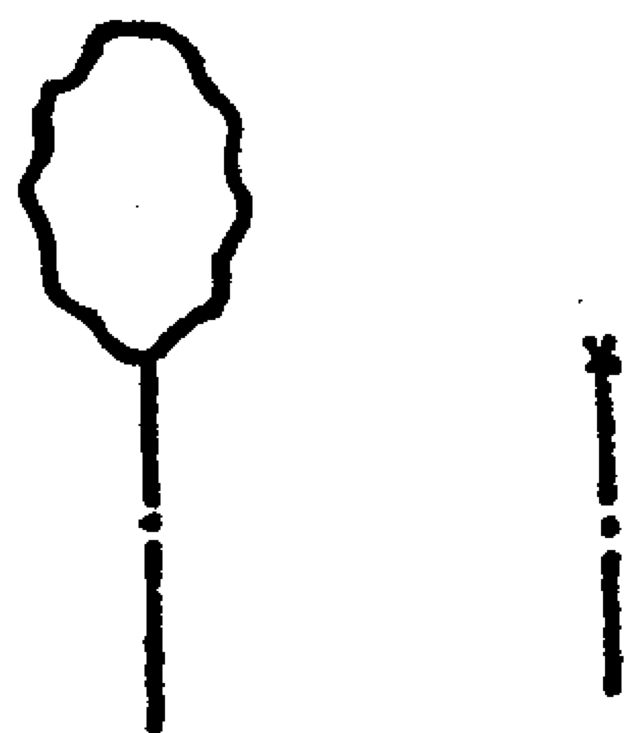


图15 有自发破缺对称性的杨-米尔斯理论中的"蝌蚪"型图.

拉氏量(7.36)式对于作了代换

$$m_1\to\tilde{m}_1,\ g\to\tilde{g},\ \tilde{g}=\tilde{z}_1\tilde{z}_2^{-1}g,\ \tilde{m}_1=\tilde{z}_1\tilde{z}_2^{-1}m_1 \qquad (7.38)$$

以后的规范变换(6.32)是不变的.广义瓦德恒等式和对称情况下同样地修正:

$$\frac{1}{\alpha}f^2(\square)\partial_\mu\left[\frac{1}{i}\ \frac{\delta Z_R}{\delta J_\mu^a(x)}\right]=\int\left\{D_0(x-y)\partial_u J_\mu^a(y)dy\right\}Z_R$$

$$+\int\left\{(J_\mu^b)^{tr}(y)\tilde{z}_1 g\varepsilon^{bca}\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta J_\mu^c(y)}+\frac{\tilde{z}_1 g}{2}\delta^{bd}\xi_\sigma(y)\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta\xi_B^b(y)}\right.$$

$$\left.-\xi_B^b(y)\tilde{z}_1\left[\frac{g}{2}\varepsilon^{bca}\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta\xi_B^c(y)}+\delta^{bd}\frac{g}{2}\frac{1}{i}\ \frac{\delta}{\delta\xi_\sigma(y)}+m_1\delta^{bd}\right]\right\}$$

$$\times G_R^{da}(J,\xi_B,\xi_\sigma,y,x)dy, \qquad (7.39)$$

(我们提醒一下，在所考虑的规范中，常数 $\tilde{z}_1$ 是有限的)．可重整性的证明实际上是逐字重复对称情况下的相应的论证。唯一的技术复杂性在于，由于在广义规范中场 A_μ^a, B^a 的混合，二点格林函数成为 (2×2) 的矩阵．

最后一点要说明的是关于二点格林函数的重整化．因为在现在情况下，我们处理的是有质量的粒子，减除可以在质壳上进行．因此，我们假定，抵销项的选择使得 σ 粒子的总的二点格林函数以及杨-米尔斯场格林函数的横向部分的极点与相应的自由函数的极点重合．然而，一般说来我们不能保证相应极点的留数等于 1．从 (7.38) 式可见，质量和波函数重整化的抵销项是不独立的．规定了格林函数极点的位置以后，我们就不能再任意地处理这些极点的留数值．因此，为了保证单粒子态的正确归一化，有必要进行一个附加的有限的重整化．

§4.8 重整化 S 矩阵

我们已经证明了，可以进行重整化而不破坏理论的规范不变性．现在来证明，重整化理论满足相对性原理；也就是说，物理过程的几率不依赖于规范条件的实际选择．这样就可以证明重整化 S 矩阵的么正性．

在这一节里，我们考虑有自发破缺对称性的模型，其中所有的物理粒子都有不为零的质量．形式上，所有的论证也可以应用

于对称性的理论，但在这种情况下，正如已经指出过的，质壳上的矩阵元包含附加的红外奇异性。因此，在微扰论框架内，对称性理论中的 S 矩阵严格说来是不存在的。

这样，让我们考虑格林函数的重整化生成泛函，它可以写成

$$Z(J_\mu, \zeta_\sigma) = N^{-1}\int \exp\left\{ i\int\left[\mathscr{L}_R + J^a_\mu A^a_\mu + \zeta_\sigma \sigma\right]dx\right\}$$
$$\times \Delta(\mathscr{A})\prod_x \delta(\partial_\mu \mathscr{A}_\mu)d\mathscr{A}\,d\sigma\,d\mathscr{B}. \tag{8.1}$$

这里，$\mathscr{L}_R$ 是和物质场相互作用的杨-米尔斯场的规范不变的重整化拉氏量（为了确定起见，我们考虑拉氏量（7.36)式）．我们将假定源 J^a_μ 是横的：

$$\partial_\mu J^a_\mu = 0. \tag{8.2}$$

S 矩阵的矩阵元利用约化公式用 Z 的泛函导数表示：

$$S_{i_1\cdots i_n, j_1\cdots j_m}(k'_1\cdots k'_n, p'_1\cdots p'_l; k_1\cdots k_m, p_1\cdots p_q)V^{\frac{n+m}{2}}W^{\frac{l+q}{2}}$$
$$= (k'^2_1 - m^2_1)\cdots(k'^2_n - m^2_1)(p'^2_1 - m^2_2)\cdots(p'^2_l - m^2_2)$$
$$\times (k^2_1 - m^2_1)\cdots(k^2_m - m^2_1)(p^2_1 - m^2_2)\cdots(p^2_q - m^2_2)$$
$$\times \theta(k'_{10})\cdots(k'_{n0})\theta(-k_{10})\cdots\theta(-k_{m0})$$
$$\times \theta(p'_{10})\cdots\theta(p'_{l0})\theta(-p_{10})\cdots\theta(-p_{q0})$$
$$\times u^{i_1}_{\mu_1}\cdots u^{i_n}_{\mu_n}G_{\mu_1\cdots\mu_n\nu_1\cdots\nu_m}(k'_1\cdots p_q)$$
$$\times u^{j_1}_{\nu_1}\cdots u^{j_m}_{\nu_m}\Big|_{p^2 = p'^2 = m^2_2;\ k^2 = k'^2 = m^2_1} \tag{8.3}$$

这里，k，k' 表示矢量粒子的动量，p，p' 表示标量粒子的动量．常数 V 和 W 是重整化因子：

$$\delta^{ab}\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)V \underset{k^2 = m^2_1}{=\!=} (k^2 - m^2_1)\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)$$
$$\times \int e^{ikx}\frac{\delta^2 Z}{\delta J^a_\mu(x)\delta J^b_\nu(0)}\Big|_{J,\ \zeta=0}dx, \tag{8.4}$$

$$W \underset{k^2 = m^2_2}{=\!=} (p^2 - m^2_2)\int e^{ipx}\frac{\delta^2 Z}{\delta\zeta_\sigma(x)\delta\zeta_\sigma(0)}\Big|_{J,\ \zeta=0}dx. \tag{8.5}$$

如果二点格林函数在质壳上归一化为 1，

$$(p^2-m^2)G(p^2)=1, \quad p^2=m^2, \tag{8.6}$$

则这些因子不存在，我们回到第三章(3.64)式。

当中间正规化去掉时，在洛仑兹规范中算出的矩阵元 (8.3) 式趋向确定的极限。让我们来证明，矩阵元(8.3) 式的值实际上不依赖于规范条件的选择。

让我们将生成泛函 $Z(J_\mu, \zeta_\sigma)$ 的表达式(8.1)式由洛仑兹规范转到么正规范[注]

$$B^a=0. \tag{8.7}$$

重整化拉氏量 $\mathscr{L}_R$ 的不变性使得我们能够运用第二章中的方法达到这一目的。

按等式

$$\Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{F})\int\delta(\mathscr{B}^\omega)\prod_x d\omega=1 \tag{8.8}$$

定义规范不变的泛函 $\Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{F})$，其中

$$\mathscr{B}^\omega=\mathscr{B}-\widetilde{m}_1 u-\frac{\mathfrak{F}}{2}[\mathscr{B}, u]-\frac{\mathfrak{F}}{Z}\sigma u+O(u^2). \tag{8.9}$$

这样，就能将泛函 $Z(J_\mu, \zeta_\sigma)$ 改写成

$$Z(J_\mu, \zeta_\sigma)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_R+J_\mu^a\mathscr{A}_\nu^a+\zeta_\sigma\sigma\right]dx\right\}\Delta(\mathfrak{F}, \mathscr{A})$$

$$\times\prod_x\delta(\partial_\mu\mathscr{A})\Delta'(\mathscr{B}, \mathfrak{F}, \sigma)\delta(\mathscr{B}^\omega)d\omega d\mathscr{A}d\sigma d\mathscr{B}. \tag{8.10}$$

过渡到新变量：

$$\mathscr{A}_\mu\to\mathscr{A}_\mu^{\omega^{-1}}, \quad \mathscr{B}\to\mathscr{B}^{\omega^{-1}}, \quad \sigma\to\sigma^{\omega^{-1}}, \quad \omega^{-1}\to\omega, \tag{8.11}$$

并对 ω 积分，我们得到与第二章完全类似的结果：

$$Z(J_\mu, \zeta_\sigma)=N^{-1}\int\exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_R+J_\mu^a(\mathscr{A}_\mu^\omega)^a+\zeta_\sigma\sigma^\omega\right]dx\right\}$$

〔注〕原书泛函 Z 的宗量分别为 (J,ζ_σ)，(J,ζ)，(J_μ,ζ) 和 (J,ζ_σ)，现统一为 (J_μ, ζ_σ)。——译者

$$\times \Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{g}) \prod_x \delta(\mathscr{B}) d\mathscr{A} d\sigma d\mathscr{B}, \tag{8.12}$$

其中，

$$\mathscr{A}^{\omega}_{\mu} = \mathscr{A}_{\mu} + \delta\mathscr{A}_{\mu} = \mathscr{A}_{\mu} + \partial_{\mu}u - \mathfrak{g}[\mathscr{A}_{\mu}, u] + O(u^2), \tag{8.13}$$

$$\sigma^{\omega} = \sigma + \delta\sigma = \sigma - \frac{\mathfrak{g}}{2}(\mathscr{B}u) + O(u^2),$$

而函数 u 由下述方程决定：

$$\partial_{\mu}\mathscr{A}^{\omega}_{\mu} = \Box u - \mathfrak{g}\partial_{\mu}[\mathscr{A}_{\mu}, u] + \partial_{\mu}\mathscr{A}_{\mu} + \cdots = 0. \tag{8.14}$$

泛函 $\Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{g})$ 在表面 $\mathscr{B}=0$ 上的值为

$$\Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{g})_{\mathscr{B}=0} = \det\left| \widetilde{m}_1 + \frac{\mathfrak{g}\sigma(x)}{2}\right|^3$$

$$= 常数 \times \det\left| m_1 + \frac{g\sigma(x)}{2}\right|^3 \tag{8.15}$$

泛函(8.12)式和么正规范中格林函数生成泛函的差别只在有源的项的形式。我们现在来证明，如果将它们代入约化公式(8.3)，则这一差别消失，那就是说，重整化矩阵元在代换

$$J^a_{\mu}(\mathscr{A}^{\omega}_{\mu})^a \to J^a_{\mu}\mathscr{A}^a_{\mu}, \quad \zeta_{\sigma}\sigma^{\omega} \to \zeta_{\sigma}\sigma \tag{8.16}$$

之下保持不变。

格林函数可以用泛函(8.12)式的变分导数表示为

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{m+q} \frac{\delta^{(m+q)}Z}{\delta J^{a_1}_{\mu_1}(x_1)\cdots\delta J^{a_m}_{\mu_m}(x_m)\delta\zeta(y_1)\cdots\delta\zeta(y_q)}\Bigg|_{J,\zeta=0}$$

$$= N^{-1}\int \exp\left\{i\int\left[\mathscr{L}_R\right]dx\right\}\Delta'(\sigma, \mathscr{B}, \mathfrak{g})(\mathscr{A}^{\omega}_{\mu_1})^{a_1}(x_1)$$

$$\cdots(\mathscr{A}^{\omega}_{\mu_m})^{a_m}(x_m)\sigma^{\omega}(x_1)\cdots\sigma^{\omega}(x_q)\prod_x \delta(\mathscr{B}) d\mathscr{A} d\sigma d\mathscr{B} \tag{8.17}$$

其中，$\mathscr{A}^{\omega}_{\mu}$，$\sigma^{\omega}$ 由 (8.13) 式决定。由于源 J_{μ} 被认为是横的，线性项 $\partial_{\mu}u$ 不给出任何贡献，$\delta\mathscr{A}_{\mu}$ 和 $\delta\sigma$ 的微扰论展开式从对场二次的项开始，

图16上画出的图形对应于格林函数(8.17)[注1]. 其中, 图 (a) 和图 (b) 类型的图对所有的变量 p_i、k_j 都有极点.图(c)类型的图至少对于动量p_i、k_j中之一是单粒子不可约的 (画出的图是对动量 p_1单粒子不可约. 这意味着沿着动量p_1的传播, 不可能将它分为只由一条线连接的两部分).

(a)

(b)

(c)

图16

从费曼图解析性的研究知道, 单粒子不可约图对于相应的变量没有极点奇异性. 因此, 如果将对应于图(c)的系数函数乘上

$$\prod_i (k_i^2 - m_1^2) \prod_j (p_j^2 - m_2^2), \qquad (8.18)$$

并假定 $k_i^2 = m_1^2$, $p_j = m_2^2$, 则这一表达式为零.

在图16(a)上插入标明$\Pi_{\mathscr{A}}$, Π_σ的黑圈所代表的外线则可得图 16(b) 类型的图. 在质壳上, 这等效于将格林函数乘上其值等于函数$\Pi_{\mathscr{A}}(k^2)$和$\Pi_\sigma(p^2)$在点$k^2 = m_1^2$, $p^2 = m_2^2$上的值的常数. 具有m根在质壳上的矢量外线, q 根在质壳上的标量外线的格林函数之值, 在规范改变时, 按如下方式变换[注2]:

[注1] 原书图16的各个图中, 右下方为$\boldsymbol{k}_n$. ——译者

[注2] 原书下式右边为 $(1 + \Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^n (1 + \Pi_\sigma(m_2^2))^m \prod_{i=1}^{n} \cdots$. ——译者

$$\prod_{i=1}^{m}(k_i^2-m_1^2)\prod_{j=1}^{q}(p_j^2-m_2^2)G^{(u)a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(k_1\cdots k_m,\ p_1\cdots p_q)$$

$$=(1+\Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^m(1+\Pi_\sigma(m_2^2))^q\prod_{i=1}^{m}(k_i^2-m_1^2)\prod_{j=1}^{q}(p_j^2-m_2^2)$$

$$\times G^{(L)a_1\cdots a_m}_{\mu_1\cdots\mu_m}(k_1,\cdots,\ k_m,\ p_1,\cdots p_q)\Big|_{\substack{k_i^2=m_1^2\\ p_j^2=m_2^2}}. \qquad (8.19)$$

这里，$G^{(u)}$是么正规范中的格林函数，$G^{(L)}$是洛仑兹规范中的格林函数。显然，其他规范的格林函数之间也由完全类似的公式联系。

对于二点格林函数，相应的变换由图17表示。不同规范中格林函数在质壳上的值由下式相联系：

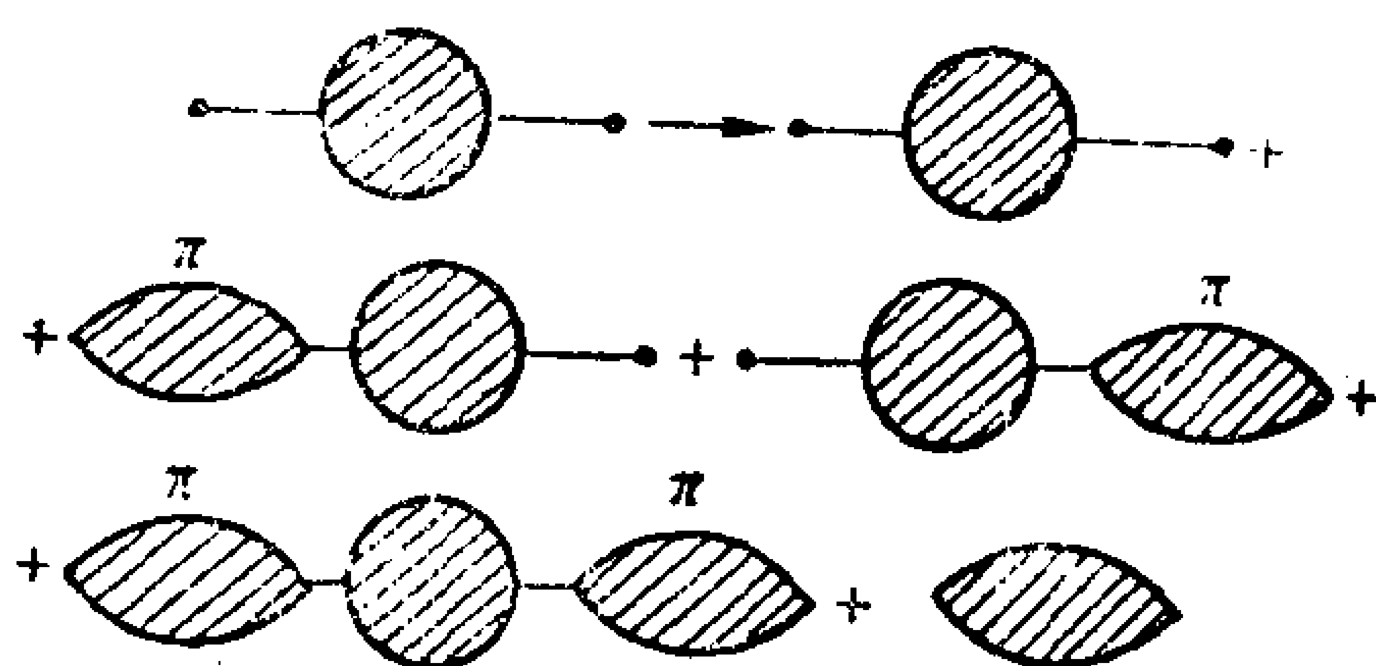


图17

$$(k^2-m_1^2)G^{(L)ab}_{\mu\nu}(k)\underset{k^2=m_1^2}{=\!=\!=}(1+\Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^2(k^2-m_1^2)G^{(u)ab}_{\mu\nu}(k),$$

$$(8.20)$$

$$(p^2-m_2^2)G^{(L)}_\sigma(p)\underset{p^2=m_2^2}{=\!=\!=}(1+\Pi_\sigma(m_2^2))^2(p^2-m_2^2)G^{(u)}_\sigma(p).$$

回到(8.3)式，我们看到，过渡到么正规范意味着将有m根矢量外线和q根标量外线的格林函数的富里叶变换乘上

$$(1+\Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^m(1+\Pi_\sigma(m_2^2))^q, \qquad (8.21)$$

与此同时，归一化常数V和W分别乘上$(1+\Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^2$和$(1+\Pi_\sigma(m_2^2))^2$。其结果，重整化矩阵元的表达式保持不变。

从这一个实际上和公理化场论中的玻厄(Borhers)定理相似的论证可以得结论，重整化S矩阵元不依赖于规范条件的具体选择；因此，重整化理论满足相对性原理。

在$\mathscr{B}=0$的规范中，重整化拉氏量有如下形式[注]

$$\mathscr{L}_R=\mathscr{L}^R_{YM}+\left\{\frac{z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1}}{2}m_1^2A_\mu^2+\frac{1}{2}z_{2\varphi}\partial_\mu\sigma\partial_\mu\sigma-\frac{(m_2^2+\delta m_2^2)\sigma^2}{2}\right.$$

$$-\frac{2\delta m_2^2 m_1}{g}\sigma+\frac{m_1 g}{2}z_{1\varphi}^2 z_{2\varphi}^{-1}\sigma A_\mu^2+\frac{z_{1\varphi}^2 z_{2\phi}^{-1}}{8}g^2\sigma^2A_\mu^2$$

$$\left.-\frac{zgm_2^2}{4m_1}\sigma^3-\frac{zg^2m_2^2}{32m_1^2}\sigma^4\right\}. \tag{8.22}$$

所有的非物理粒子(哥德斯通玻色子、虚构c粒子、矢量场的纵向量子) 都不存在，散射矩阵的幺正性是显然的。由于S矩阵与规范无关，当正规化去掉时，质壳上的矩阵元趋向确定的极限。注意，由拉氏量(8.22)产生的离开质壳的格林函数并不是这样的。与(8.22)式对应的矢量场自由格林函数有以下形式：

$$D_{\mu\nu}=\frac{-1}{(2\pi)^4}\ \frac{g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu m_1^{-2}}{k^2-m_1^2}, \tag{8.23}$$

它在$k\to\infty$时趋于一个常数。计算具有n_3个三矢量顶角，n_4个4腿顶角和$L_外$根矢量外线的图形的发散指数，得到

$$\omega=4+4n_4+2n_3-2L_外, \tag{8.24}$$

随着n_i的增加，发散图的类型的数目无限增加，这表明，离开质壳理论就是不可重整的。然而，为了从质壳上的矩阵元中去掉发散，只要有(8.22)式中写出的有限数目的抵项就够了.规范不变性导致了明显可重整的规范和明显幺正的规范之间的物理等效性，而这样一来，重整化S矩阵就同时有这两种性质。

显然，这些结论不依赖于具体的模型(8.22)式；它们同样实用于第一章(3.13)式的模型，而且也适用于和费米子有规范不变相互作用的模型。只有重整拉氏量的规范不变性是本质的。

[注] 原书下式右边大括号内的第六项的系数为$z_{1\varphi}z_{2\varphi}^{-1}/8$，——译者

在结束这一节的时候，我们回到证明在广义可重整规范中格林函数的有限性的问题，迄今为止，我们所考虑过的，或者是洛仑兹规范，或者是矢量格林函数的纵向部分在 $k\to\infty$ 时下降快的规范。现在来证明，这个条件不是必需的，形式如(7.33)[注]式的抵销项保证了格林函数在任何可重整规范中，也就是在 $k\to\infty$ 时矢量场自由格林函数的纵向部分不比横向部分下降慢的规范中，都是有限的。这种规范的最简单的例子是 $f(k^2)=1$ 的规范。

在任意一个这样的规范中，发散图形具有前面已经讨论过的结构：只有具有一根、二根、三根和四根外线的图形有可能发散。和以前一样，我们能够选择常数 z_2、$\tilde{z}_2$、$z_{2\varphi}$、$z_{2\psi}$、$\tilde{z}_1$、z 和 δ_m，使得所有的二点格林函数和顶角函数 $\Gamma_{\bar{c}c\mathscr{A}}$、$\Gamma_{\sigma}$ 都有限，并且用重整化作用量的不变性来决定常数 z_1、$z_{1\varphi}$、$z_{1\psi}$：

$$z_1z_2^{-1}=\tilde{z}_1\tilde{z}_2^{-1}=z_{1\varphi}z_{2\varphi}^{-1}=z_{1\psi}z_{2\psi}^{-1}. \tag{8.25}$$

现在来证明如下形式的比值在质壳上不依赖于规范：

$$\frac{\Gamma_{\mathscr{A}^3}}{(\Gamma_{\mathscr{A}\mathscr{A}})^{3/2}},\quad \frac{\Gamma_{\bar{\psi}\psi\mathscr{A}}}{(\Gamma_{\psi\psi})(\Gamma_{\mathscr{A}\mathscr{A}})^{1/2}},\quad \text{等等}, \tag{8.26}$$

其中所有的矢量外腿被假定是横的。实际上，根据(8.19)和(8.20)式，从一个规范过渡到另一个规范使得所考虑的函数按如下方式改变(略去张量结构)：

$$\left.\begin{aligned}&\Gamma_{\mathscr{A}^3}(k_1,\ k_2,\ k_3)\to(1+\Pi_A(m_1^2))^3\Gamma_{A^3}(k_1,\ k_2,\ k_3),\\&\Gamma_{\mathscr{A}\mathscr{A}}(k)\to(1+\Pi_{\mathscr{A}}(m_1^2))^2\Gamma_{\mathscr{A}\mathscr{A}}(k),\ (k_i^2=m_1^2).\end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

将这些式子代入(8.26)式，就能验证这一比值的不变性。前面证明过，在洛仑兹规范中所有的函数都有限。函数 $\Gamma_{\mathscr{A}\mathscr{A}}$ 的有限性是由于常数 z_i 的选择。因此，在任意规范中，函数 $\Gamma_{\mathscr{A}^3}(k_1,\ k_2,$

[注] 原书中为(7·3)式。——译者

k_3)在$k_i^2=m_i^2$处有限。因为在可重整规范中，这一函数只能是对数发散的，由此就得到$\Gamma_{\mathscr{A}^3}$，在任意k_i值时的有限性。

所有剩下的格林函数的有限性可以完全类似地证明。必须强调指出，现在我们考虑的是离开质壳的格林函数。在质壳上，在所有的规范中都不存在发散，包括不是明显可重整的规范（矢量场格林函数的纵向部分在k大时行为有如$k^{2n}(n>-1)$的规范）。

在可重整规范中，有限数目的不变抵销项就保证了格林函数在离开质壳时也存在。自然，抵销项的具体数值依赖于规范的选择。特别是，在普遍的规范中，常数$\tilde{z}_1$的值不再是有限的。

§4.9 反常瓦德恒等式

在构造么正的重整化S矩阵时，我们用了不变的中间正规化。不变正规化作用量的存在使我们能够得到广义瓦德恒等式，并利用它们证明么正规范和洛仑兹规范的等效性。一般说来，并不需要采用不变的中间正规化。原则上，我们可以引入任意的中间正规化，并选择抵销项使得重整化格林函数满足广义瓦德恒等式。如果正规化不是不变的，则为此可能需要非不变的抵销项，如象电动力学中的光子质量重整化。

在此情况下，在正规化理论中，相对性原理破坏了，而在去掉中间正规化的极限下，相对性原理的正确性需要特别的研究。有可能会发现，无论怎样选择局域抵销项，重整化格林函数都不满足广义瓦德恒等式。这样使得不同规范不等效，因而理论不自洽。在此情况下，不存在么正的重整化S矩阵（至少在微扰论的框架中是如此）。

在实践中，当费米场的规范变换中包含矩阵γ_5时，就会出现所指出的情况。在此情况下，以上介绍过的两种不变正规化方法都不适用。在维数正规化中，发现不可能在任意维数空间中给矩阵γ_5给出前后一贯的定义。利用高阶协变导数正规化还是能保

证所有多圈图的有限性；然而，利用泡利-维拉方法来对单圈图进行不变正规化，在此情况下是不可能的，因为费米场的质量项$\mu_j\bar{\psi}_j\psi_j$破坏了γ_5不变性。这样，对于单圈图不存在γ_5不变的正规化，而我们将看到，对于一些包含γ_5变换在内的规范群，格林函数不满足广义瓦德恒等式。

作为一个简单例子，考虑由拉氏量

$$
\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - igA_\mu\gamma_5)\psi,
$$

$$
\gamma_5 = -i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3, \tag{9.1}
$$

描述的$U(1)$规范群模型。这一拉氏量在阿贝尔规范变换

$$
\left.\begin{aligned}
&A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x),\\
&\psi(x) \to e^{ig\gamma_5\lambda(x)}\psi(x),\\
&\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}(x)e^{ig\gamma_5\lambda}(x)
\end{aligned}\right\} \tag{9.2}
$$

之下不变.初看起来,不同规范等效性的全部论证都能应用于它。在α规范中，有效拉氏量有以下形式：

$$
\mathscr{L}_{\rm eff} = \mathscr{L} + \frac{1}{2\alpha}(\partial_\mu A_\mu)^2, \tag{9.3}
$$

其中，$\mathscr{L}$即为规范不变的表达式(9.1)式.拉氏量(9.3)是不退化的，它不仅描述矢量场的横向极化量子，而且也描述自旋为零的标量量子.

我们可以拉氏量(9.3)为出发点，在它的基础上建立量子理论。众所周知，这样一个理论在物理上是不自洽的：包括标量量子的事件的几率可以取负值。然而，如果拉氏量(9.3)产生的格林函数满足瓦德恒等式

$$
\left\{\frac{1}{\alpha}\partial_\mu\left(\frac{\delta Z}{\delta J_\mu(x)}\right) - Z\partial_\mu J_\mu(x) + ig\bar{\eta}(x)\gamma_5\frac{\delta Z}{\delta\bar{\eta}(x)}\right.
$$

$$
\left. + ig\frac{\delta Z}{\delta\eta(x)}\gamma_5\eta(x)\right\} = 0, \tag{9.4}
$$

其中 z 是一个如下形式的生成泛函：

$$Z = N^{-1}\int \exp\left\{ i\int\left[\mathscr{L}_{\text{eff}} + J_\mu A_\mu + \bar{\eta}\psi + \bar{\psi}\eta\right]dx\right\} d\mathscr{A}\, d\bar{\psi}\, d\psi, \tag{9.5}$$

则容易证明，在包含横极化量子的态和包含标量量子的态之间跃迁的矩阵元等于零。这意味着，将“物理的”横极化态联起来的 S 矩阵是么正的。（严格说来，由于红外发散，在所考虑的模型中，不存在 S 矩阵。然而，可以证明，所有的论证都适用于矢量场有非零质量因而没有红外发散的情况。）

形式上，恒等式(9.4)可以从拉氏量(9.1)在变换(9.2)下的不变性得到。它的一个特殊情况是关系式

$$\partial^{x_1}_{\mu_1} \frac{\delta^n \ln z}{\delta J_{\mu_1}(x_1)\cdots\delta J_{\mu_n}(x_n)}\bigg|_{J,\,\eta=0} = 0,\quad n>2, \tag{9.6}$$

它明显地表明横向和纵向极化态之间不存在跃迁。

实际上，我们并不对(9.4)式感兴趣，严格说来它没有意义，因为它里面包含发散积分。我们感兴趣的是重整化格林函数的相应关系式。在电动力学中和上面讨论过的非阿贝尔模型中，格林函数满足广义瓦德恒等式，它和(9.4)式的差别只在于包含了电荷和质量的重整化。对于(9.1)式的模型就不是这样，和图 18 对应的有三条矢量外线的格林函数，不管选取什么局域抵销项都不满足(9.4)式。恒等式(9.6)意味着，由等式

$$\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)G_{\mu\mu'}(p)G_{\nu\nu'}(q)G_{\alpha\alpha'}(p+q)$$

$$= \int e^{ipx}e^{iqy}\left(\frac{-i\delta^3 Z}{\delta J_{\mu'}(x)\delta J_{\nu'}(y)\delta J_{\alpha'}(0)}\right)dx\,dy \tag{9.7}$$

定义的三点顶角函数的富里叶变换 $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)$ 必须是横的：

$$p_\mu\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) = q_\nu\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) = (p+q)_\alpha\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) = 0. \tag{9.8}$$

考虑到 $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)$ 对宗量 $(p,\ \mu)$，$(q,\ \nu)$，$(-(p+q),\ \alpha)$ 是对称的，算出 $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)$，得到

$$i(p+q)_\alpha \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) = -\frac{g^3}{6\pi^2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta \neq 0. \tag{9.9}$$

由于图18中图形的指数等于1，函数 $\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)$ 只能确定到 p 和 q 的一个一次多项式。我们可以试图利用这一任意性来使（9.9）式的右边等于零，然而容易看到，这是不可能的。重整化三腿顶角函数的最普遍表达式有以下形式：

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) = \Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q) + c_1\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\beta + C_2\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}q_\beta, \tag{9.10}$$

其中，$\Gamma_{\mu\nu\alpha}(p,\ q)$ 是一个满足（9.9）式的对称顶角函数。通过要求函数 $\tilde{\Gamma}_{\mu\nu\alpha}$ 对宗量 $(\mu,\ p)$，$(\nu,\ q)$，$(\alpha,\ -(p+q))$ 对称，我们得到

$$c_1 = c_2 = 0. \tag{9.11}$$

由此可见，不可能选择局域抵销项来使重整化顶角函数满足恒等式（9.8）。其结果，由横极化态到纵极化态的跃迁几率不等于零。由拉氏量(9.1) 描述的模型是不自洽的。这里的困难是所有对于含矩阵 γ_5 的阿贝尔规范变换不变的理论所固有的。然而，

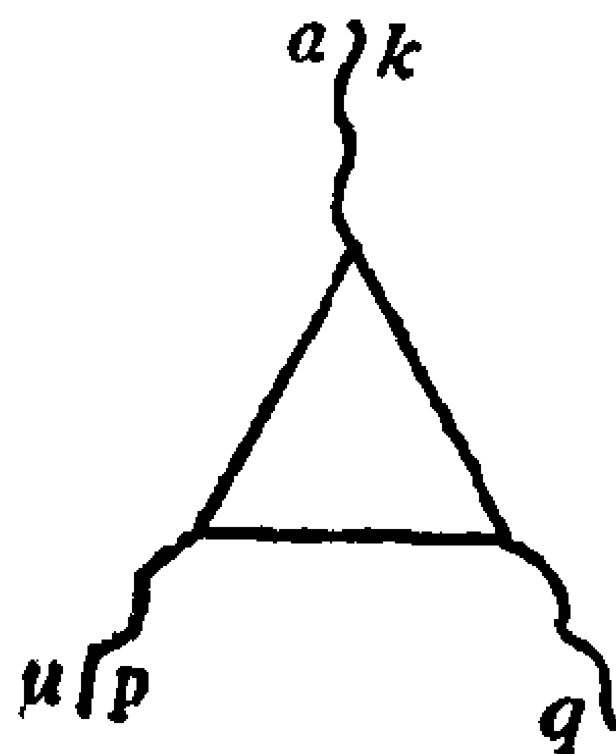


图18　反常三角图

存在着一类模型，对于它们这一困难可以避免。例如，假定在(9.1)式中除了场 ψ 之外，还包含一个场 ψ'，它按照场 ψ 相同的方式和矢量场相互作用，但是和 ψ 的差别在于所带的荷的符号：

$$\mathscr{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu)^2 + i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial - igA\gamma_5)\psi$$

$$+ i\bar{\psi}'\gamma_\mu(\partial + ig\gamma_5)\psi', \tag{9.12}$$

则和图18一道，还有一个类似的图形，其中的内线对应于场 ψ'。从(9.9)式可见，反常顶角函数的散度正比于 g^3。因此，对应于

ψ'的图形将对恒等式（9.9）给出大小相同而符号相反的贡献。其结果，总的顶角函数 $\Gamma_{\mu\nu\alpha}$ 将满足正常的恒等式(9.8)式。通过直接计算不难验证，所有剩下的单圈图都满足（9.8）式。至于包含一个圈以上的图形，可以在普遍形式下证明，对于它们，不存在反常。实际上，在§4.3中已经证明了，用高阶协变导数方法进行正规化，可以使所有的多圈图在任何规范不变的理论中都收敛。因此，如果在单圈图中无反常，则多圈图无疑满足正常的瓦德恒等式。

在(9.12)式的模型中不存在反常，也可以用以下方式解释。在拉氏量中可以变换到新的正则变量

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{2}\{(1-\gamma_5)\psi + (1+\gamma_5)\psi'\}; \\ \psi_2 &= \frac{1}{2}\{(1+\gamma_5)\psi + (1-\gamma_5)\psi'\}. \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

用场ψ_1、ψ_2表出的相互作用的拉氏量不包含矩阵γ_5：

$$\mathscr{L}_1 = (g\bar{\psi}_1\gamma_\mu\psi_1 - g\bar{\psi}_2\gamma_\mu\psi_2)A_\mu, \tag{9.14}$$

且显得和两个无质量旋量场的电磁相互作用拉氏量相似。这样一个理论在纯矢量规范变换

$$\left.\begin{aligned} &\psi_1(x) \to e^{ig\alpha(x)}\psi_1(x),\quad \bar{\psi}_1(x) \to e^{-ig\alpha(x)}\bar{\psi}_1(x), \\ &\psi_2(x) \to e^{-ig\alpha(x)}\bar{\psi}_2(x),\quad \bar{\psi}_2(x) \to e^{ig\alpha(x)}\bar{\psi}_2(x), \\ &A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu\alpha(x) \end{aligned}\right\} \tag{9.15}$$

之下不变，因而重整化格林函数满足正常瓦德恒等式。这一种消除反常的机制也可以用到更为现实的模型中，特别是有自发破缺对称性的模型。如果场ψ、ψ'、A_μ也和标量场相互作用，则相应地选择势能使所有物理粒子由于希格斯机制而获得非零质量。与此同时，和出现反常有关的旋量场与矢量场的相互作用形式保持不变。因此，关于消除反常的所有论证仍然正确。

反常瓦德恒等式也可能在非阿贝尔规范场中出现。例如，设旋量场 ψ 以规范不变的方式和杨-米尔斯场相互作用：

$$\mathscr{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu(\partial_\mu - g\Gamma^a A_\mu^a)\psi + \cdots, \tag{9.16}$$

"…"表示杨-米尔斯场的拉氏量，也可能还有场 $\mathscr{A}_\mu$、ψ 和标量场的规范不变相互作用。后者既可以对应于对称理论也可以对应于有自发破缺对称性的理论。

矩阵Γ^a实现李代数表示：

$$[\Gamma^a,\ \Gamma^b] = t^{abc}\Gamma^c, \tag{9.17}$$

而且也能够包含矩阵γ_5。三腿顶角格林函数的发散度的计算和阿贝尔情况完全一样。唯一的差别在于出现了一个正比于顶点上 Γ 矩阵的乘积之迹的附加因子：

$$i(p+q)_\alpha \Gamma^{a\,b\,c}_{\mu\,\nu\,\alpha}(p,\ q) = 常数 \times \mathrm{tr}\{\gamma_5[\Gamma_a,\ \Gamma_b]_+\Gamma_c\} \times \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}p_\alpha q_\beta. \tag{9.18}$$

如果因子

$$A_{abc} = \mathrm{tr}\{\gamma_5[\Gamma_a,\ \Gamma_b]_+\Gamma_c\} \tag{9.19}$$

不为零，则函数$\Gamma^{a\,b\,c}_{\mu\,\nu\,\alpha}$不满足广义瓦德恒等式，从而使重整化理论丧失规范不变性。

让我们来分析，在什么情况下A_{abc}等于零。因此，代替矩阵Γ_a，我们引进手征矩阵$T_\pm$：

$$\Gamma_a = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)T_a^+ + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)T_a^-, \tag{9.20}$$

其中的$T_\pm$已经不包含矩阵γ_5。

现在，因子A_{abc}可以表示为

$$A_{abc} = 2(A_{abc}^+ - A_{abc}^-), \tag{9.21}$$

其中

$$A_{abc}^\pm = \mathrm{tr}\{[T_a^\pm,\ T_b^\pm]_+T_c^\pm\}. \tag{9.22}$$

如果$A^+=A^-$，显然 A_{abc} 成为零。如果$T_a^{\pm}$的表示么正等效：

$$T_a^- = UT_a^+U^+, \tag{9.23}$$

（U是一个么正矩阵），则这一点肯定能成立。在此情况下，通过选择另一种旋量场基底，可以将相互作用改写为纯矢量形式：

$$\bar{\psi}\gamma_\mu\Gamma_a\psi = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\mu\{(1+\gamma_5)T_a^+ + (1-\gamma_5)T_a^-\}\psi$$

$$= \bar{\psi}'\gamma_\mu T_a^+\psi', \tag{9.24}$$

其中

$$\psi' = \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1-\gamma_5)U\psi. \tag{9.25}$$

在ψ场的这种重新定义之下，γ_5矩阵出现在质量项中．在这一模型中，不出现反常是完全自然的．在基底ψ'之下，规范变换不再包含矩阵γ_5，而因此对它们可以应用以上介绍过的不变正规化方法，它使我们能严格地证明广义瓦德恒等式．规范群的实际形式并不重要。

这样的模型被称为“类矢量”模型，因为在高能下，当能量大大超过所有的特征质量时，它们的行为和纯矢量相互作用的模型一祥。

T_- 和 T_+ 的么正等效性对于不存在反常并非必要的．为此只要满足(9.21)式就够了，而这一等式可能因为其它的原因而得到满足。

如果 $A^+_{abc}=A^-_{abc}=0$，则反常也不存在，这在某些规范群中会发生．它的充分条件是：由矩阵$T_a^{\pm}$实现的表示应该是实的（一个表示称为实的，如果它么正等效于它的复共轭的话）．在此情况下，

$$\mathrm{tr}\{[T_a^{\pm}, T_b^{\pm}]_+T_c^{\pm}\} = \mathrm{tr}\{[(T_a^{\pm})^*, (T_b^{\pm})^*]_+(T_c^{\pm})^*\}$$

$$= -\mathrm{tr}\{[T_a^{\pm}, T_b^{\pm}]_+T_c^{\pm}\} = 0. \tag{9.26}$$

这一情况对于代数

$$SU(2);\ SO(N),\ N\geqslant 5,\ N\neq 6;\ S_p(2N),\ N\geqslant 3;$$
$$G(2);\ E(4);\ E(7);\ E(8) \tag{9.27}$$

成立，它们的所有表示都是实的。对于$SU(3)$代数，只有表示8和$3+\bar{3}$才不出现反常。

在非阿贝尔理论中，有四条矢量外线的单圈图也可以是反常的。另一方面，如果在给定的模型中，所有的单圈图都满足正常瓦德恒等式，多圈图肯定不存在反常。正象我们已经指出的，这可从下述情况中直接得出：高阶协变导数正规化方法在任何规范理论（包括含有γ_5的规范理论）中，都能将多圈图正规化。因此，多圈图自动地满足正常瓦德恒等式。

以上对"正常"和"反常"理论的分类同样适用于有自发破缺对称性的理论。在反常情况下，么正规范和重整化规范对应于物理上不等效的理论。在么正规范中，理论不可重整，而因此在微扰论的框架中无意义。与此相反，在可重整规范中，微扰论不难建立起来，然而S矩阵在物理态的空间中不么正。这样，对于不存在反常的要求，给可能的规范不变模型加上了很严格的约束。

第五章　结论：一些应用

在这一章中，我们将讨论规范理论应用于描述基本粒子相互作用的可能性。弱作用和强作用两方面的实验状况改变非常快，在今天很难对具体模型作出选择。因此，我们将限于描述规范不变的基本粒子模型的最有特征性的特点，而不打算描述这一领域的最新进展。所考虑的模型带有教育和示范的性质。

§5.1　弱作用和电磁作用的统一模型

直到最近，电动力学是一般的量子场论特别是规范不变理论在基本粒子物理中唯一应用成功的例子。与此同时，早就注意到弱作用和电磁作用有许多共同性。由实验中已经知道弱作用包含矢量流。这导致一种观点，认为象在电动力学中一样，弱作用是通过交换矢量粒子而发生的，这种矢量粒子被称为中间玻色子。象电磁流一样，弱流也守恒。而最后，弱作用是普适的——弱相互作用由一个单一的常数表征（忽略由于不同基本粒子混合而产生的效应）。

所有这些事实可以得到自然的解释，如果假定弱作用和电磁作用由一个规范不变的理论描述，在这个理论中，杨-米尔斯场起传递相互作用的作用。然而，和长程电磁相互作用不一样，弱相互作用有一个有限的相互作用力程，而因此，相应的矢量场必须有质量。第二个差别是弱作用不保持宇称守恒。这些差别在很长时期里妨碍了建立实际的弱作用和电磁作用的统一理论；而利用希格斯机制能够对这些差别加以说明。自发对称性破缺使得我们能够在内禀荷的空间中选定一个“电磁”方向。和这一方向对应的矢量介子保持为零质量，并和宇称守恒流相互作用。其余的介子得到非零质量，它们的相互作用不保持宇称守恒。

让我们来考虑这一观念的最简单的实现方式．规范群的选择在很大程度上是任意的．群的维数必须不少于 3，因为它至少必须包含和光子相对应的生成元（1）以及和中间矢量介子相对应的生成元（2）．只考虑“轻”的轻子——电子，μ 子和相应的中微子——生成元的最少数目等于4．实际上，荷电弱流有下述结构：

$$j_e^+ = \bar{\nu}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) e = \bar{\psi}_e \gamma_\mu (1+\gamma_5) \tau^+ \psi_e, \tag{1.1}$$

其中

$$\psi_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

（μ 子的流有类似的结构）．

因此，矩阵$(1+\gamma_5)\tau^+$和$(1+\gamma_5)^-$包含在规范群的李代数中．包括这些矩阵在内的最小李代数包含有生成元

$$(1+\gamma_5)\tau^+,\ (1+\gamma_5)\tau^-,\ (1+\gamma_5)\tau_3, \tag{1.3}$$

而对应于群 $SU(2)$．这一代数不包含有可能构成宇称守恒电磁流的生成元．既生成电磁流又生成荷电弱流的最简单的代数对应于群$U(2)$，它包含 4 个生成元，其中之一对应中性弱流．

正是这个群形成了温伯格-萨拉姆模型的基础，我们下面就来讨论这一模型．

如果不把自身局限于已知的“轻”的轻子，就有可能通过引进附加的弱作用粒子，来构造一个具有荷电流和电磁流的统一模型，仍然保持在群 $SU(2)$之中．这样一个模型由乔治(Georgi)和格拉肖(Glashow)提出．然而，这一模型和最近的实验不符，我们将不讨论它．

以上指出的可能性是最小的一个．在文献中讨论过基于更复杂的规范群的许多模型．

历史上，当第一个统一模型刚刚建立的时候，中性流和重轻子都还没有在实验上发现．目前，它们都已被实验证实．

下面，我们将详细描述基于群$SU(2)\times U(1)$的模型——温伯洛-萨拉姆模型。在该模型中，电子和电子型中微子联合成$SU(2)$二重态 L 和单态R：

$$L=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)\binom{\nu_e}{e},\qquad R=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)e. \tag{1.4}$$

这样选择多重态，是由于右旋极化和左旋极化轻子在弱作用中是不对称的——在实验上没有观察到右旋极化中微子。μ 子和 μ 子型中微子联合成类似的多重态。往下，我们将限于考虑电子部分。要求带电弱流有V-A型结构，以及光子只和带电粒子的矢量流相互作用，我们得到下述变换规则：

$$\left.\begin{aligned}&L(x)\to L(x)-ig\frac{\tau^a}{2}\zeta^a(x)L(x)-\frac{ig}{2}\eta(x)L(x)+\cdots,\\&R(x)\to R(x)-ig_1\eta(x)R(x)+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{1.5}$$

由于$SU(2)\times U(1)$不是单纯群，规范变换包含两个任意参量 g 和 g_1。和子群 $SU(2)$ 和 $U(1)$ 对应的是下述规范场：同位矢量场A_μ^a和同位单态B_μ。

描述多重态 R 和 L 与杨-米尔斯场相互作用的规范不变拉氏量有以下形式：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}=&\frac{1}{8}\mathrm{tr}\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}-\frac{1}{4}G_{\mu\nu}G_{\mu\nu}+\bar{L}i\gamma_\mu\Big[\partial_\mu+ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a\\&+\frac{ig_1}{2}B_\mu\Big]L+\bar{R}i\gamma_\mu[\partial_\mu+ig_1B_\mu]R\end{aligned} \tag{1.6}$$

其中$\mathscr{F}_{\mu\nu}$是杨-米尔斯场强张量，$G_{\mu\nu}$是阿贝尔场的类似的张量

$$G_{\mu\nu}=\partial_\nu B_\mu-\partial_\mu B_\nu. \tag{1.7}$$

注意，由于要求在变换(1.5)式下的不变性，轻子的质量项

$$m(\bar{L}R+\bar{R}L) \tag{1.8}$$

被禁戒。

包含在拉氏量(1.6)式中的所有的场都有零质量．然而，如果场$\mathscr{A}_\mu$、B_μ和R、L也与标量场相互作用，则它们可以由于希格斯机制而获得非零质量．因为所有的矢量介子除了光子以外都必须变成有质量的，我们将采用具体的自发对称性破缺模型第一章(3.25)式．引进复二重态

$$\varphi=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \tag{1.9}$$

它在规范变换下按下述方式变换：

$$\varphi\to\varphi-ig\zeta^a(x)\frac{\tau^a}{2}\varphi-\frac{ig_1}{2}\eta(x)\varphi(x). \tag{1.10}$$

描述φ和场$\mathscr{A}_\mu$、B_μ、R、L的相互作用的规范不变拉氏量有如下形式：

$$\mathscr{L}=\left|\partial_\mu\varphi+ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a\varphi+\frac{ig_1}{2}B_\mu\varphi\right|^2-G\left\{(\bar{L}\varphi)R+\bar{R}(\varphi^+L)\right\}$$
$$+\frac{m^2}{2}\varphi^2-\lambda^2(\varphi^2)^2. \tag{1.11}$$

我们知道，(1.11)式类型的相互作用会产生自发对称性破缺：φ场的真空期待值不等于零，而为了在不对称的基态周围建立微扰论，有必要过渡到平移的场：

$$\varphi\to\varphi'=\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2+r\end{pmatrix}\quad(\mathrm{Im}r=0). \tag{1.12}$$

这样平移的结果，出现了矢量场的质量项：

$$\frac{r^2}{4}\left[g^2(A_\mu^1)^2+g^2(A_\mu^2)^2+(g_1B_\mu-gA_\mu^3)^2\right]. \tag{1.13}$$

二次型(1.13)的对角化，导致下述质量谱：

带电介子$W_\pm$，

$$W_{\mu\mp}=\frac{A_\mu^1\pm A_\mu^2}{\sqrt{2}} \tag{1.14}$$

得到质量

$$m_W = \frac{1}{\sqrt{2}} g r, \tag{1.15}$$

中性介子

$$Z_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2}(-g A_\mu^3 + g_1 B_\mu) \tag{1.16}$$

和

$$A_\mu = (g^2 + g_1^2)^{-1/2}(g_1 A_\mu^3 + g B_\mu) \tag{1.17}$$

分别得到质量 $\frac{r}{\sqrt{2}}(g^2+g_1^2)^{1/2}$ 和 0。平移(1.12) 也使轻子获得非零质量. 质量项的形式是

$$-G\left\{\bar{L}\begin{pmatrix}0\\ r\end{pmatrix}R + \bar{R}(0,r)L\right\} = -Gr\bar{e}e. \tag{1.18}$$

中微子仍然无质量.

最后，利用展开式

$$\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(iB_1 + B_2);\ \varphi_2 = r + \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma - iB_3), \tag{1.19}$$

我们发现场 σ 得到质 $2\lambda r$.

哥德斯通场 B_i 有零质量，和通常一样可以利用规范变换将它消去.

轻子与矢量场的相互作用有以下形式：

$$\mathscr{L}_I = \frac{-g}{2\sqrt{2}}\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)eW_\mu^+ + \text{厄米共轭} + \frac{gg_1}{(g^2+g_1^2)^{1/2}}\bar{e}\gamma_\mu e A_\mu$$
$$+\frac{(g^2+g_1^2)^{1/2}}{4}\left\{\bar{\nu}_e\gamma_\mu(1+\gamma_5)\nu_e - 2\bar{e}\gamma_\mu\left[\gamma_5 + \frac{g^2-3g_1^2}{g^2+g_1^2}\right]e\right\}Z_\mu. \tag{1.20}$$

由此式可见，电磁常数 e 和费米弱作用常数 G_F 由参量 g 和 g_1 按以下方式表示：

$$e = \frac{gg_1}{\sqrt{g^2+g_1^2}}, \tag{1.21}$$

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}}=\frac{g^2}{8m_W^2} \tag{1.22}$$

由(1.21)式可见

$$e\leqslant g, \tag{1.23}$$

因而

$$m_W=\left(\frac{g^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2}\geqslant\left(\frac{e^2\sqrt{2}}{8G_F}\right)^{1/2}=37.5\text{GeV}. \tag{1.24}$$

即，带电中间玻色子的质量有下限，而且下限的数值很大.

类似地，估计中性介子的质量，给出

$$M_Z\geqslant 75\text{GeV}. \tag{1.25}$$

除了以上写出的项以外，相互作用拉氏量也描述标量介子 σ 的自作用以及它和轻子的相互作用. 因为 σ 介子的质量是一个自由参数，可以将它选得很大，使得在可达到的能量下，包含 σ 介子的过程被强烈压低. 然而，这一质量不能任意地大：在 $m_\sigma\to\infty$ 的极限下，包含 σ 内线的图形的振幅趋于无穷.

相互作用拉氏量的 μ 子部分有和(1.20)式完全一样的形式.

温伯格-萨拉姆模型的最令人感兴趣的实验预言是存在中性流. 这一预言已得到证实.

至于说到带电弱流相互作用，温伯格-萨拉姆模型在最低阶的预言和唯象四费米子模型的预言相符. 但与后者不一样的是，温伯格-萨拉姆模型使我们也能计算高阶辐射修正.

让我们更详细地讨论温伯格-萨拉姆模型的重整化. 因为(1.6)、(1.11) 式是规范不变的，在上一章中介绍的重整化方法可以应用于它. 然而，规范群包含阿贝尔子群 $U(1)$，而按照 §4.8 的分类，是反常的. 因此，由拉氏量(1.6)、(1.11)式描述的温伯格-萨拉姆模型虽然形式上规范不变，却是不可重整的. 这一状况可以用上一章中介绍的机制来改善. 在那里我们看到，如果右手和左手极化费米子对反常三角图给出大小相等符号相反的贡献，则在任何规范群的情况下都不出现反常. 因此，在温伯格-萨拉姆模

型中除了电子多重态（1.1）式之外，引进有相反螺旋度(helicity）的多重态

$$\tilde{R}=\frac{1}{2}(1-\gamma_5)\binom{N}{E},\quad \tilde{L}=\frac{1}{2}(1+\gamma_5)E, \tag{1.26}$$

它们按照 L 与 R 相同的方式和矢量场相互作用：在这样修改的模型中，就不存在发散。然而应注意，不可能用 μ 子和 μ 中微子来作为 $\tilde{L}$ 和 $\tilde{R}$，因为相互“抵销”的轻子必须以相反的螺旋度包含在弱相互作用中。这样，温伯格-萨拉姆模型的可重整的推广，需要引入重轻子。

下面要讨论的第二种可能性，利用了轻子流和强子流反常的相互抵销。

现在让我们来讨论强子的弱作用和电磁作用。与温伯格-萨拉姆模型预言存在中性轻子流类似，对于强子部分的类似的模型我们也可预言存在强子的弱中性流。如果强子的对称群是 $SU(3)$ 群，则中性流包含奇异数改变项，为了看到这一点，我们回忆一下，在 $SU(3)$ 对称理论中，强子的带电弱流由卡比波(Cabbibo)公式描述[注]：

$$j_\mu^+=\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)(d\cos\theta+s\sin\theta), \tag{1.27}$$

其中，u 和 d 是带电2/3和－1/3的“质子”和“中子”夸克，s 是带电-1/3的奇异夸克，而 θ 是卡比波角，它表征改变奇异数和不改变奇异数的过程的相对几率。

与轻子的温伯格-萨拉姆模型一样，对应于带电流的生成元生成了群 $SU(2)$。因此，在规范不变理论中，和荷电流（1.27）一道，还包含如下形式的中性流

$$j_\mu^3=\bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u+(\bar{d}\cos\theta+\bar{s}\sin\theta)\gamma_\mu(1+\gamma_5)(d\cos\theta+s\sin\theta). \tag{1.28}$$

［注］原书中对于夸克的符号在本节中用 p、n、λ，下节中用 u、d、s，现统一用 u、d、s。——译者

中性流j_μ^3和杨-米尔斯场的第 3 分量A_μ^3相互作用，而因此表现为电磁流和带电弱流的线性组合。其结果，这一模型中包含有奇异数改变的中性流过程，例如

$$K_L^0 \longrightarrow \mu^+\mu^-, \quad K^+ \longrightarrow \pi^+\nu\bar{\nu}, \tag{1.29}$$

而且这类过程的几率应该可以和带电流过程的几率相比。实验上知道，象(1.29)式那样的过程在很高精度以内禁戒。$K_L^0\to\mu^+\mu^-$的衰变几率和带电流过程$K^+\to\mu^+\nu_\mu$的衰变几率之比小于10^{-9}。在规范不变理论中，可以通过放弃强子的 $SU(3)$ 结构而将这类过程禁戒。最简单的可能性是用$SU(4)$群代替$SU(3)$群。在夸克模型中，这等效于引进带有新量子数——"粲"数的第 4 个夸克c。弱和电磁作用的 4 夸克规范模型可以用和轻子的温伯格-萨拉姆模型相同的方式建立起来。左旋极化夸克联合成两个 $SU(2)$二重态

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} u \\ d\cos\theta + s\sin\theta \end{pmatrix}, \\ L_2 &= \frac{1}{2}(1+\gamma_5)\begin{pmatrix} c \\ -d\sin\theta + s\cos\theta \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{1.30}$$

而右旋极化夸克形成单态

$$\left.\begin{aligned} &R_1 = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)u, \quad R_2 = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)c, \\ &R_3 = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(d\cos\theta + s\sin\theta), \\ &R_4 = \frac{1}{2}(1-\gamma_5)(-d\sin\theta + s\cos\theta). \end{aligned}\right\} \tag{1.31}$$

带电强子流有如下形式：

$$j_\mu^+ = \bar{u}_L\gamma_\mu(d\cos\theta + s\sin\theta) + \bar{c}_L\gamma_\mu(-d\sin\theta + s\cos\theta). \tag{1.32}$$

将j_μ^+和j_μ^-对易，得到j_μ^3的表达式

$$\begin{aligned} j_\mu^3(x) &= \left[\int j_0^+(y)d^3y, j_\mu^-(x)\right]. \\ &= \bar{u}\gamma_\mu(1+\gamma_5)u + \bar{d}\gamma_\mu(1+\gamma_5)d + \bar{s}\gamma_\mu(1+\gamma_5)s. \end{aligned} \tag{1.33}$$

在这一中性流中，不存在奇异数改变项，因此(1.29)式这样的过程在最低级弱作用中禁戒.

这里我们不写出强子的弱和电磁相互作用的总的规范不变拉氏量. 它完全类似于 (1.3) 式. 它的最值得注意的特点是预言了“粲”强子态. 最近的实验证实了规范理论的这一预言.

在结束对强子弱作用模型的描述时，我们指出，按照广泛接受的观点，存在着由“颜色”不同而相互区别的三种类型的夸克，那就是说，每个夸克 u、c、d、s 可以有三种不同的“色”. 弱作用对色不敏感，相应的拉氏量是三个完全相同的拉氏量之和. 提出存在“色”的假定是为了在通常关于自旋统计关系假设的框架内解释观察到的强子谱. 值得注意的是，颜色的引进同时也使以上介绍的弱作用统一模型变成自洽的. 在包含 4 种轻子μ、e、${}_{\mu}\nu$、ν_e 以及带有三种色而电荷为 2/3、2/3、-1/3、-1/3 的 4 种夸克u、c、d、s的模型中，不存在反常，因此，相应的理论是可重整的. 在此情况下，轻子的总电荷（－2）和夸克的总电荷$\left(\frac{2}{3}\times 3=2\right)$大小相等，方向相反，由于这一原因，轻子流和强子流的反常相消.

所介绍的模型，直到最近为止，解释了所有已知的实验事实. 从理论的观点来看，其特点在于(假设夸克有分数电荷)，它是只包含轻的轻子μ、e、ν_μ、ν_e 的唯一的可重整弱作用模型. 然而，现在已经知道，轻子谱并不局限于 μ 子和电子，而且也存在“重”轻子. 因此，有 4 种轻子和 4 种三色夸克的模型是不够的. 存在着构造包含大量轻子和夸克的可重整规范模型的许多可能性. 由于目前还不存在可靠的实验结果让我们选择任何一个具体模型，我们不在这里讨论它们.

§5.2　渐近自由　强作用的规范理论

初看起来，强作用动力学是太复杂了，很难在任何合理的量

子场论模型的框架中描述它．直到最近，为了描述强作用，或者是采用基于因果性和幺正性的最普遍的物理要求上的色散关系方法，或者是采用唯象模型．为细致地描述强作用动力学而建立一个相对论性拉格朗日模型的尝试，即使是定性的成功也未能得到．

另一方面，轻子-强子深度非弹性散射实验明显地显示出有一种简单的动力学机制形成强作用的基础．在动量转移较大时（它等效于空间距离较小时），强子的行为就好象它们是由无相互作用的点状客体组成．这样就产生了定性图象：强子是复合物体，它们的组成子之间的相互作用在小距离时趋于零．与此同时，在距离大时，有效相互作用变得很强，使得强子成为强束缚系统．

有可能在量子场论模型的框架内描述这样一种相互作用吗？对这一问题的回答是丝毫不含糊的：以上所描述的相互作用行为能够在非阿贝尔规范理论中得到．所有不包含杨-米尔斯场的前后一贯的场论模型都使得有效相互作用在距离小时增大．杨-米尔斯场的这一独特的特点是由渐近自由的现象所引起的，下面就来介绍它．

现在来讨论格林函数在深度欧氏区域中的行为，在这种区域中，所有动量宗量p_i的平方都是负的，并且有大的绝对值．这一渐近行为自然没有物理意义，因为为了计算S矩阵，所需要的是格林函数在$p_i^2=m_i^2\geqslant 0$之值．然而，可以证明，深度非弹性散射过程的几率和格林函数在深度欧氏区域的行为有直接关系．

更精确地说，我们将研究强连接正规顶角函数$\Gamma_m(\chi p_1,\cdots,\chi p_m,m,g)$在$\chi\to\infty$时的渐近行为，而$p_i^2=-a_i^2<0$．为此，需要用到重整化群方法，下面就简单地回顾这一方法的基本概念．

我们已经知道，从发散正规顶角函数中减除泰勒展开式的领头项等效于在拉氏量中插入局域抵销项，且又等效于对包含在拉氏量中的参数进行重整化．从一个减除点转到另一个减除点，等效于一个有限的重整化．例如，插进抵销项

$$\frac{1}{8}\mathrm{tr}\{(z_2-1)(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)^2+2g(z_1-1)(\partial_\nu\mathscr{A}_\mu-\partial_\mu\mathscr{A}_\nu)$$

$$\times[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]+(z_1^2z_2^{-1}-1)[\mathscr{A}_\mu,\mathscr{A}_\nu]^2\}+\cdots \tag{2.1}$$

(其中，“…”代表对应于虚构粒子及物质场的抵销项)等效于格林函数和荷的重整化：

$$\left.\begin{aligned}
&G(^{\mathrm{tr}}_{\mu\nu}k,g)\longrightarrow z_2^{-1}G^{\mathrm{tr}}_{\mu\nu}(k,g'),\\
&\Gamma_{\mathscr{A}^3}(p,q,g)\longrightarrow z_1\Gamma_{\mathscr{A}^3}(p,q,g'),\\
&\Gamma_{\mathscr{A}^4}(k,p,q,g)\longrightarrow z_1^2z_2^{-1}\Gamma_{\mathscr{A}^4}(k,p,q,g'),\\
&g\longrightarrow g'=z_1z_2^{-3/2}g.
\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

因此，在插入抵销项（2.1）式的同时将耦合常数乘上 $z_1^{-1}z_2^{3/2}$ 不改变重整化耦合常数。

我们用D、$g\Gamma_3$、$g^2\Gamma_4$来表示将$G^{\mathrm{tr}}_{\mu\nu}$，$\Gamma_{\mathscr{A}^3}$和$\Gamma_{\mathscr{A}^4}$中的张量结构分离出去以后出现的标量函数. 它们无因次，因而可以表示为

$$\left.\begin{aligned}
&D=D\left(\frac{k^2}{\lambda},\frac{m^2}{\lambda},g\right);\quad \Gamma_3=\Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda},\cdots,\frac{k_3^2}{\lambda},\frac{m^2}{\lambda},g\right),\\
&\Gamma_4=\Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda},\cdots,\frac{k_{10}^2}{\lambda},\frac{m^2}{\lambda},g\right),\\
&k_1^2\equiv p^2,k_2^2\equiv q^2,k_3^2\equiv(p+q)^2,\ \text{等等}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

其中，λ是减除点（选择不变变量使得函数Γ_i在 $k_i^2=\lambda<0$ 时是实的）. 如果在减除点改变的同时伴随着相抵销的荷变换，则理论不依赖于减除点的选择（重整化不变性），其条件可以写为

$$\left.\begin{aligned}
&D\left(\frac{k^2}{\lambda_2},\frac{m^2}{\lambda_2},g_2\right)=z_2D\left(\frac{k^2}{\lambda_1},\frac{m^2}{\lambda_1},g_1\right),\\
&\Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda_2},\cdots,\frac{k_3^2}{\lambda_2},\frac{m^2}{\lambda_2},g_2\right)=z_1^{-1}\Gamma_3\left(\frac{k_1^2}{\lambda_1},\cdots,\frac{k_3^2}{\lambda_1},\frac{m^2}{\lambda_1},g_1\right),\\
&\Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda_2},\cdots,\frac{k_{10}^2}{\lambda_2},\frac{m^2}{\lambda_2},g_2\right)=z_1^{-2}z_2^{1}\Gamma_4\left(\frac{k_4^2}{\lambda_1},\cdots,\frac{k_{10}^2}{\lambda_1},\frac{m^2}{\lambda_1},g_1\right),\\
&\qquad g=z_1z_2^{-3/2}g_1.
\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

我们将认为这函数可用条件[注]

$$D,\Gamma_3,\Gamma_4=1,\qquad 当x_i=\frac{k_i^2}{\lambda_1}=1 \tag{2.5}$$

归一化。

由方程 (2.4) 和归一化条件得到

$$\left.\begin{aligned} z_2&=D\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{m^2}{\lambda_2},g_2\right),\\ z_1^{-1}&=\Gamma_3\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{\lambda_1}{\lambda_2},\frac{m^2}{\lambda_2},g_2\right).\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

因此，通过引进无因次变量

$$x_i=\frac{k_i^2}{\lambda_2},\quad y=\frac{m^2}{\lambda_2},\quad t=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \tag{2.7}$$

可将方程组 (2.4) 改写为

$$\left.\begin{aligned} &D(x,y,g)=D(t,y,g)D\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\bar{g}(t,y,g)\right),\\ &\Gamma_3(x_1,\cdots,x_3,y,g)=\Gamma_3(t,\cdots,t,y,g)\\ &\qquad\times\Gamma_3\left(\frac{x_1}{t},\cdots,\frac{x_3}{t},\frac{y}{t},\bar{g}(t,y,g)\right),\\ &\Gamma_4(x_4,\cdots,x_{10},y,g)=\Gamma_4(t,\cdots,t,y,g)\\ &\qquad\times\Gamma_4\left(\frac{x_4}{t},\cdots,\frac{x_{10}}{t},\frac{y}{t},\bar{g}(t,y,g)\right).\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

其中，函数

$$\bar{g}(t,y,g)=g\Gamma_3(t,\cdots,t,y,g)[D(t,y,g)]^{3/2} \tag{2.9}$$

在变换(2.4)下不变。这一函数称为不变荷。

我们将在深度欧氏区 $x_i=\chi\tilde{x}_i$，$\chi\to\infty$中处理这些方程。我们还将假定

$$|\lambda_i|\gg m^2. \tag{2.10}$$

可以证明，在可重整理论中，格林函数在所指明的区域中的渐近行为的主要项不依赖于质量，因此，在(2.8)式中可以令$y=0$。

[注] 原书下式中的 λ 无下标。——译者

改写方程组(2.8)，将它式对 t 微分并令 $t=1$，得到[注1]

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\chi\frac{\partial}{\partial\chi}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)D(\chi\tilde{x},g)=\psi_2(g)D(\chi\tilde{x},g),\\
&\left(\chi\frac{\partial}{\partial\chi}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma_3(\chi\tilde{x}_i,g)=\psi_3(g)\Gamma_3(\chi\tilde{x}_i,g),\\
&\left(\chi\frac{\partial}{\partial\chi}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\Gamma_4(\chi\tilde{x}_i,g)=\psi_4(g)\Gamma_4(\chi\tilde{x}_i,g),
\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

其中[注2]

$$\beta(g)=\left.\frac{\partial\bar{g}(t,g)}{\partial t}\right|_{t=1},\tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\psi_n(g)=\left.\frac{\partial\Gamma_n(t,\cdots,t,g)}{\partial t}\right|_{t=1}, \quad n=3,4\\
&\psi_2(g)=\left.\frac{\partial D(t,g)}{\partial t}\right|_{t=1}.
\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

对于更高阶的格林函数$\Gamma_n(\chi\tilde{x}_1,\cdots,\chi\tilde{x}_l,g)$，显然也可以写出类似的方程．不变荷 $\bar{g}$ 满足的方程最简单．将不变条件．

$$\bar{g}(\chi,g)=\bar{g}\left(\frac{\chi}{t},\bar{g}(t,g)\right)\tag{2.14}$$

对 t 微分，并令 $t=1$，得到

$$\left(\chi\frac{\partial}{\partial\chi}-\beta(g)\frac{\partial}{\partial g}\right)\bar{g}(\chi,g)=0.\tag{2.15}$$

边界条件是

$$\bar{g}(1,g)=g.\tag{2.16}$$

通过将(2.14)式对 χ 微分，再令$\chi=t$，可以得到不变荷方程的另一种有用的形式．我们得到

$$\chi\frac{\partial\bar{g}}{\partial\chi}=\beta(\bar{g}),\tag{2.17}$$

或写成积分形式

$$\int_g^{\bar{g}(\chi,g)}\frac{da}{\beta(a)}=\ln\chi.\tag{2.18}$$

[注1] 原书以下第一式中的 $\tilde{\chi}$ 也有下标 i． ——译者
[注2] 原书(2.13)式第二式中的下标为i，而且没有$n=3,4$． ——译者

利用(2.15)式，很容易将(2.11)式的解用不变荷表示．通解形式为

$$\Gamma_n(\chi\tilde{x}_i,g)=\Gamma_n(\tilde{x}_i,g)\exp\left\{\int_1^{\chi}d\chi'\psi_n[\bar{g}(\chi',g)](\chi')^{-1}\right\}. \quad (2.19)$$

由此式可以得到重要结论：在渐近区域中，不变荷 $\bar{g}$ 是表征相互作用强度的有效参量．因此，为了得到有关格林函数渐近行为的知识，需要知道 $\bar{g}$ 的行为．由(2.15)和(2.17)式可见，不变荷的行为由函数 $\beta(\bar{g})$ 的性质决定．如果 $\beta(\bar{g})$ 是正的，则不变荷随 χ 而增加．如果在某个 $\bar{g}$ 值，函数 $\beta(\bar{g})$ 成为零，而(2.18)式左边的积分发散，则右边趋于无穷大．换句话说，当 $\chi\to\infty$，$\bar{g}(\chi,g)\to\bar{g}_0$，其中 $\bar{g}_0$ 是函数 β 的零点．如果函数 β 在 $\bar{g}>g$ 时无零点，则当 $\chi\to\infty$ 时，$\bar{g}\to\infty$．对于负的 $\beta(\bar{g})$，情况正相反．函数 $\bar{g}(\chi,g)$ 当 χ 增加时减小．如果函数 $\beta(\bar{g})$ 在 $\bar{g}=\bar{g}_0<g$ 时为零，则当 $\chi\to\infty$ 时，$\bar{g}\to\bar{g}_0$．

这样，β 函数的零点可能是稳定的，也可能是不稳定的．如果常数 g 是在一个"稳定"零点 $\bar{g}_0$ 附近，则当 χ 增加时，不变荷 $\bar{g}(\chi,g)$ 趋于 $\bar{g}_0$．在不稳定情况下，当 χ 增加时，不变荷愈来愈远离 $\bar{g}_0$．它或者趋向于下一个零点，或者趋向无穷．这两个情况都画在图19上．由图可见，稳定零点与不稳定零点轮流出现．

在实践中，计算 β 函数的唯一可靠办法是微扰论．因此，实际上我们只能在 $g=0$ 点的附近考查它的行为．如果在 $g=0$ 附近，β 函数是负的，则当 χ 增加时，不变荷趋于零．在此情况下，我们说，零点是紫外稳定点，而理论有渐近自由．后一论断的意思是，当能量增加时，有效相互作用变得越来越弱，而在小距离处，粒子的行为象自由粒子．当 β 函数在零点附近是正的情况下，有效荷随能量而增加，其结果会越出微扰论的应用范围．

在大多数量子场论模型中，出现的是第二种可能性．例如，在电动力学中，在 α 的最低次

$$\beta(\alpha)=\frac{\alpha^2}{3\pi}. \quad (2.20)$$

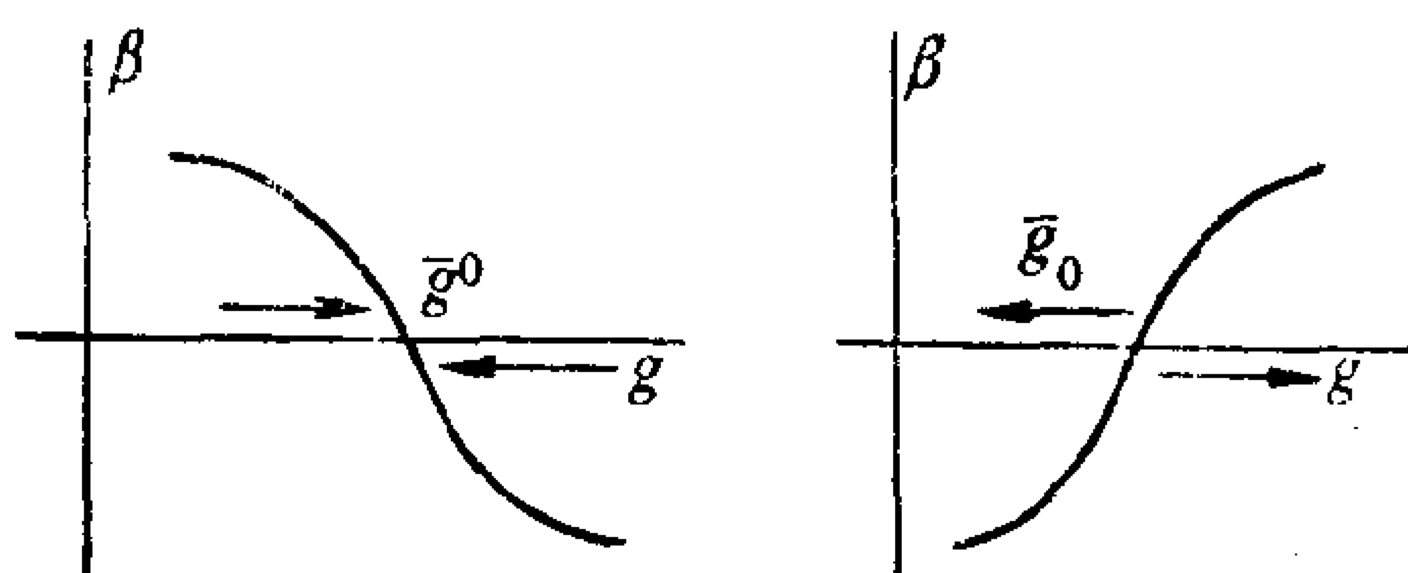


图19　β函数的稳定零点与不稳定零点

将这个值代入(2.18)式，得到

$$\bar{\alpha}(\chi,\alpha)=\frac{\alpha}{1-\dfrac{\alpha}{3\pi}\ln\chi}. \qquad (2.21)$$

可以看出，当χ增加时，$\bar{\alpha}(\chi,\alpha)$增大，而在$\chi=e^{3\pi/\alpha}$时，它趋于无穷。当然，实际上在$\chi\sim e^{3\pi/\alpha}$时，(2.21)式不能用，因为在计算函数$\beta$时，假定了有效耦合常数小。

如果仍然试图将(2.21)式推广到大$\bar{\alpha}$区域，立刻就会碰到矛盾。在电动力学中，有效荷和光子格林函数按下式联系

$$\bar{\alpha}(\chi,\alpha)=\alpha d(\chi,\alpha), \qquad (2.22)$$

其中

$$D_{\mu\nu}(k)=-\frac{1}{k^2}\left(g_{\mu\nu}-\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)d(k^2,\alpha). \qquad (2.23)$$

因此，如果(2.21)式中的分母变成零，就意味着光子格林函数有一个极点。不难验证，在这个极点上的留数是负的。相应的状态有负的模，这和幺正条件不相容。这样，在$g\sim0$时$\beta(g)>0$的情况下，微扰论不能给出关于格林函数渐近行为的可靠的知识。

杨-米尔斯场的情况与此很不相同。在这一理论中，$\beta(g)$在零附近是负的，而因此零是一个紫外稳定点，实际上，按定义

$$\beta(g)=\left.\frac{\partial\bar{g}^2(\chi,g)}{\partial\chi}\right|_{\chi=1}, \qquad (2.24)$$

在杨-米尔斯场情况下，不变荷

$$\bar{g}^2(\chi,g)=g^2\Gamma_3^2D^3(\chi), \qquad (2.25)$$

因为 $\chi = k^2/\lambda$，

$$\frac{\partial}{\partial \chi}\bigg|_{\chi=1} = -\lambda\frac{\partial}{\partial \lambda}\bigg|_{\lambda=k^2} = -\frac{\partial}{\partial \ln\lambda}\bigg|_{\lambda=k^2}. \tag{2.26}$$

另一方面

$$\frac{\partial}{\partial \ln\lambda} D\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{\lambda}\right)_{\lambda=k^2} = -\frac{\partial}{\partial \ln\lambda}\, z_2^{-1}\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\bigg|_{\lambda=\Lambda}, \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial}{\partial \ln\lambda}\Gamma_3\left(\frac{\boldsymbol{k}^2}{\lambda}\right)_{\lambda=k^2} = -\frac{\partial}{\partial \ln\lambda} z_1\left(\frac{\Lambda}{\lambda}\right)\bigg|_{\lambda=\Lambda}. \tag{2.28}$$

因此，为了确定$\beta(g)$，我们能够利用前面定出的z_i值．这样，我们得到

$$\beta(g^2) = -\frac{22}{3}\frac{g^4}{(4\pi)^2}. \tag{2.29}$$

因此，当 $\chi\to\infty$ 时，不变荷的平方趋于零：

$$\bar{g}^2(\chi, g^2) = \frac{1}{1+\frac{g^4}{(4\pi)^2}\frac{22}{3}\ln\chi}. \tag{2.30}$$

在深度欧氏区域中，相互作用“消逝”，理论的行为好象自由理论．对于任意规范群的情况，考虑到和物质场的相互作用，函数$\beta(g)$由下式给出：

$$\beta(g^2) = \left[-\frac{11}{3}C(G) + \frac{4}{3}T(R)\right]\frac{g^2}{16\pi^2}, \tag{2.31}$$

其中

$$\delta^{ab}C(G) = t^{acd}t^{bcd};\ \ T(R)\delta^{ab} = \mathrm{tr}\{\Gamma^a, \Gamma^b\}, \tag{2.32}$$

t^{acd} 是群的结构常数，而 Γ^i 是物质场所实现的表示的生成元．如果物质场多重态的数目不太大，则理论也是渐近自由的．

这样，如果杨-米尔斯场是强作用的传递者，在小距离处，的确会观察到准自由粒子，与深度非弹性散射的实验一致．

相反地，在 $\chi<1$ 时，有效耦合常数增加．自然，在此情况下，由微扰论得到的(2.30)式不能用．然而，如果 β 函数在$g>0$

时无零点，则由方程(2.18)得到

$$\bar{g}(\chi,g)\to\infty,\ \chi\to 0. \tag{2.33}$$

不变荷的这一行为意味着，随着距离的增加，相互作用强度会无限增大，而因此粒子将不能相互拉开到大的距离.

以上描述的定性图象在强作用的一种称为“量子色动力学”的假设的模型中得到了实现. 在这一模型中，强子被看成是夸克的束缚态. 存在着几种类型的夸克，彼此间的差别在于“味”量子数. 奇异数和粲数是“味”的例子. 每个夸克又有三种不同的“色”. 这样，夸克可以用矩阵表示为

$$\begin{pmatrix} u_r & u_y & u_b \\ d_r & d_y & d_b \\ c_r & c_y & c_b \\ s_r & s_y & s_b \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{2.34}$$

这里，脚标 r、y、b 表示“色”(红、黄、兰)，而字母u、d、c、s表示不同的味. 夸克之间的相互作用是由于交换带色的杨-米尔斯场，即“胶子”. 规范群 $SU(3)$作用在色空间中. 杨-米尔斯场形成色八重态，而对于“味”是中性的. 强作用拉氏量的形式为

$$\mathscr{L}=\frac{1}{8}\mathrm{tr}\{\mathscr{F}_{\mu\nu}\mathscr{F}_{\mu\nu}\}+\bar{q}\{i\gamma_\mu[\partial_\mu-g\Gamma(\mathscr{A}_\mu)]-m\}q\ ,$$

$$q=u,d,\cdots \tag{2.35}$$

色 $SU(3)_c$ 对称性被假定为严格的. 这意味着，杨-米尔斯场的质量严格为零.

观察到的强子谱由无色的夸克束缚态产生，它们对于群 $SU(3)_c$ 是单态. 在所有夸克都有相等质量的近似之下，(2.35)式对作用在味空间中的群SU^f的变换是不变的. 因此，将强子谱[注]按SU^f群分类是方便的(直到最近，SU^f群的最流行的候选者是$SU(4)$

[注] 原书中为重子谱. ——译者

群）。实际上，SU^f群是破缺的，因此强子多重态中的质量简併不存在。在这一图景中，最有问题的是为什么夸克没有在实验中观察到，为什么尽管杨-米尔斯场有零质量，强作用却有一个有限的力程。为了解释这一点，在由(2.35)式描述的理论有渐近自由的基础之上，提出了夸克囚禁的假设。按照以上在方程(2.10)后面所作的讨论的精神，假定由于渐近自由，有效偶合常数在相互作用的对象之间的距离增大时无限增大。其结果，带色物体——夸克和胶子——不能够彼此远离到宏观的距离。只有对应于真实强子的无色束缚态才能被观察到。这些束缚的复合体的有效相互作用有一个有限的力程，而这正好是实验中在不太大的能量下所观察到的力程。

附录 I 文献索引

在序言中已经指出，本书是对现有的量子场论著作的补充．与本书最相近的是伯格留波夫和希尔科夫著的“量子场导论”[1]．与大多数量子场论的书不一样，本书主要用路径积分来描述量子动力学．费曼和希伯斯（A. Hibbs）详细叙述了这一方法在量子动力学中的应用[2]．在瓦西列夫[3]（A. N. Vasil'ev）和波波夫[4]最近出版的著作中阐明了这一方法在无限多自由度系统的理论中的应用．规范场的经典几何图象在柯诺普略娃和波波夫的书[5]中考查过，而它的量子化及其在基本粒子模型中的应用由泰勒[6]简短地描述过．

第一章

杨振宁和米尔斯关于带有同位旋相互作用的场的论文[7]首先将规范场引入物理学，将它自然地推广到更普遍的内部自由度的情况[8]~[10]．

费曼第一个注意到量子化非阿贝尔规范场的特殊性质[11]．他用树图来再造带圈的图的方法由德魏特[12]发展．后者在文献[13]中论述了规范场和引力场量子化的最终规则．法捷耶夫和波波夫在路径积分的基础上对这些理论中的微扰论作了另一种推导[14][15]．文献[16]～[18]也是用于建立规范场的微扰论．费曼认为[11]，规范场的微扰论可以从有质量矢量场的理论取 $m\to 0$ 的的极限得到，后来发现并不正确[19][20]．在希格斯机制[21]~[23]基础上的第一个现实的统一相互作用模型由温伯格[24]和萨拉姆[25]提出．

1971年，特霍夫特将杨-米尔斯场的量子化推广到有自发破

缺对称性的情况[26]. 在1971—1972年的一系列论文中，斯拉夫诺夫[27][28]、泰勒[29]、李和金-玖斯庭[30]以及特霍夫特和韦特曼[31]发展了规范场(包括有自发破缺对称性的模型)的不变正规化和重整化的方法，从而完成了在微扰论框架中建立规范场量子理论的工作. 由李[32]、伊柳普洛斯[33]和斯拉夫诺夫[34]在高能物理国际会议上所作的报告中论述了规范场理论的不同方面及应用.

从微分几何的观点看，杨-米尔斯场表示主纤维丛空间中的联络，它的基底是时空流形，而它的典型纤维是内禀对称群. 将欧几里德联络推广到黎曼空间中的联络的概念，从二十年代起在许多几何学家的工作中开始发展起来，特别是外尔(H.Weyl)和卡当(E. Cartan). 它的现代的表述首先出现在艾列斯曼(Ehresmann)的工作中[35]. 纤维丛和联络理论的一个精采的导引可在里希列诺维奇的书中[36]找到.

在二十年代，由于广义相对论的成功，做了许多努力来将电磁场几何化. 将这种场看成包含在复数场协变导数中的联络的一部分的正确观点，出现在外尔[37]和福克[38]的关于引力场中的狄拉克方程的工作中. 外尔直接称电动力学为电荷空间中的广义相对论.

包含有规范场的运动方程的经典解在近三年来是集中研究的主题. 我们给出这一领域中的一些主要文献[39]~[42]，其中讨论了真空的解和孤子解.

第二章

费曼首先引进路径积分来陈述量子力学[2]. 微扰论中的费曼图首先在文献[43]中引进，在文献[44]中用路径积分加以论证. 文献[3]、[4]中有关于路径积分方法是在量子物理中应用的最新评述. 在本书中关于路径积分方法的表述来源于本书作者之一的

一本讲义[45].用第二章的(1.12)式将路径积分引入量子力学是取自托博克曼（Tobosman）的文章[46]. 量子力学的全纯表象来自福克的工作，其中所用的名称是量子光学中的相干态。它的数学表述可在别列金（F. A. Berezin）的书中找到[47]。其中也给出了关于反对易变量的积分的第一个严格的说明.

路径积分的边界条件由祚佛亚洛夫[48](O. I. Zav'yalov）和瓦西列夫[3]研究过。

格林函数由斯温格[49]（J. Schwinger)引入量子场论。将 S 矩阵的计算归结为对外源散射的 S 矩阵的计算的思想也属于斯温格[50].

用高斯泛函来引进路径积分在文献［1］的第一版中描述过。本书中用高斯泛函来表述路径积分的公理是遵循本文作者之一的工作[51]. 类似的方法也在文献［52］中论述过.

第 三 章

广义哈密顿动力学首先由狄拉克[53][54]提出。规范理论在库仑规范中的哈密顿表述由施温格[55]研究过。路径积分在广义哈密顿形式中的普遍表述由本文作者之一在文献[56]中给出。不象库仑规范 $\partial_i A_i=0$ 那么通用的哈密顿规范（$A_0=0$）在费曼的讲义[57]中被用来作为建立规范场论的基础.

在路径积分中用变量变换方法由一个规范过渡到另一规范，在文献[14]中提出。利用规范等效类的不同参数化作出的几何解释在文献［56］、［58］中讨论。广义 α 规范首先在文献［13］中考虑(又见[17]、[56])。本文采用的过渡到 α 规范的方法来自特霍夫特的工作[26].

第四章

重整化理论可以追溯到克拉默斯[59](H.A.Kramers)和贝特[60](H. A. Bathe)。一些学者，包括费曼、斯温格、戴逊(F. Dyson)、萨拉姆等促进了这一发展，复杂的、数学上严格的重整化理论(**R**运算理论)首先由伯格留波夫和帕拉秀克提出[61]。**R**运算的一个极好的讲述可在文献[1]中找到，其中还列出了重整化理论的详细文献目录。

采用高阶协变导数方法的重整化首先在斯拉夫诺夫[62]的工作中提出，然后在文献[28]、[30]中被用于杨-米尔斯理论中。在§4.4中介绍的对单圈图的附加的正规化在文献[63]中提出。

维数正规化在特霍夫特和韦特曼[31]、波利尼(C. G. Bollini)和伽比极[64](J. G. Giabidgi)以及阿希末[65](J. F. Ashmore)的工作中提出。

联系二点和三点格林函数的恒等式在量子电动力学中首先由瓦德[66]得到。将任意格林函数和光子外线少一根的函数联系起来的推广的关系由弗拉金[67](E. S. Fradkin)和坦卡哈西[68](Y. Takahashi)得到。电动力学的瓦德恒等式不能直接推广到非阿贝尔规范场的情况。在非阿贝尔理论中，起这种恒等式作用的是所谓广义瓦德恒等式，它首先由斯拉夫诺夫[27]和泰勒[29]得到。本书给出的推导是根据文献[69]而来。另一种推导是基于有效拉氏量对某种包含反对易参量的变换(超对称变换)的不变性，这种推导由贝奇(C. Becchi)、罗埃特(A. Rouet)和斯托拉[70](R. Stora)提出。在文献中也应用了由李[52][71]得到的单粒子不可约格林函数的广义瓦德恒等式。重整化作用量的结构在文献[27]、[29]～[31]中研究，其结果出现了对于重整化S矩阵的规范不变性和幺正性的证明。贝奇、罗埃特和斯托拉[70],[72]发展了另一种将规范理论重整化的方法，它是应用吉默曼(Zimmer-

man）的正规乘积方法得来的。

重整化常数和格林函数对规范条件的选择的依赖性在卡洛习（R. Callosh）和梯乌庭（I. Tyutin）的工作[73]中详细讨论。

反常瓦德恒等式首先被阿德勒[74]（S. L. Adler）以及贝尔和伽基[75]（R. Jaekiw）研究。它们在规范理论重整化中的作用在文献[76]～[79]中讨论。本书对反常相互作用的分类基于乔治和格拉肖的工作[79]。

第五章

弱和电磁作用的第一个（直到现在还是最通行的一个）现实的统一模型由温伯格[24]和萨拉姆[25]提出。目前，存在着大量的统一模型，它们和温伯格-萨拉姆模型的差别或者在规范群的选择上，或者是在所含的多重态。它们中的一些收集在评述报告[32]～[34]中。目前对模型的选择还未确定。

通过引进一个新的"粲"夸克来压低奇异数变化的中性流的机制由格拉肖·伊柳普洛斯和迈安尼[80]（L. Maiani）提出。

夸克有一个新的目前称为是"颜色"的附加自由度的假设，最早是在格林伯格[80]（O. Greenberg）、伯格留波夫，斯特龙明斯基（B. V. Struminsky）和塔海里茨[82]（A. N. Tavkhelidge）以及汉（M. Y. Han）和南部[83]（Y. Nambu）解释强子统计的工作中提出。在帕梯（J. Pati）和萨拉姆[84]、弗里希（H. Fritzsch）、盖尔曼和刘威勒[85]（H. Leutwyller）以及温伯格[86]的工作中首先设想，发生强作用是由于交换和色自由度相互作用的杨-米尔斯介子。相应的假设的模型称为量子色动力学。

重整化变换的群特征首先被斯特克尔伯（E. C. G. Stueckelberg）和彼特曼[87]（A. Peterman）注意到，量子电动力学中的相乘重整化群被盖尔曼和骆[88]（F. Low）用来研究格林函数的

紫外渐近性质。重整化群的普遍理论由伯格留波夫和希尔科夫在文献[89]、[90]中提出。在文献[1]中可以找到对这一理论的详细说明。重整化群的微分方程由奥弗山尼科夫[91] (L. V. Ovsyannikov) 研究过。在量子场论情况下的类似方程由凯兰[92] (C. Callan) 和习曼吉克[93] (K. Symanzik) 得到。杨－米尔斯场的渐近自由为特霍夫特[94]、格洛斯(D. Gross)和外尔戴克[95] (F. Wilczek) 以及玻利则[96] (H. D. Politzer) 所发现，夸克囚禁的假设在文献[85]、[86]、[97]、[98]中讨论。

附录Ⅰ 参考文献

[1] Bogolubov, N. N., Shirkov, D. V., An Introduction to the Theory of Quantized Fields, Moscow, Nauka, 1976.

[2] Feynmam, R, P., Hibbs, A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals, New York, McGraw-Hill Book Company, 1965.

[3] Vasil'ev, A. N., Functional Methods in Quantum Field Theory and statistics, Leningrad, Leningrad University press, 1976.

[4] Popov, V. N., path Integrals in Quantum Field Theory and Statistical Physics, Moscow, Atomizdat, 1976.

[5] Konoplyova, N. P., Popov, V. N., Gauge Fields, Moscow, Atomizdat, 1972.

[6] Taylor, J. C., Gauge Theories of Weak Interactions Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[7] Yang, C. N., Mills, R. L., Phys. Rev., 96, 191, 1954.

[8] Utiyama, R., Phys. Rev., 101, 1597, 1956.

[9] Salam, A., Ward, J. C., Nuovo Cimento, 568 (1959).

[10] Glashow, S. L., Gell-mann. M., Ann. of phys., 15, 437 (1961).

[11] Feynman, R., Acta Phys. Polonica, 24, 697 (1963).

[12] De Witt B., Phys. Rev. Lett., 12, 742 1964.

[13] De Witt B., Phys. Rev., 160, 1113, 1195 (1967).
[14] Faddeev, L. D., Popov, V. N., Lett., B25, 30 (1967).
[15] Faddeev, L. D., Popov, V. N., Preprint Institute for Theoretical Physics, Ukrainian Acad. Sci., Kiev, 1967.
[16] Mandelstam, S.. Phys. Rev., 175, 1580 (1968).
[17] Fradkin, E. S., Tyutin, I. V., Phys. Lett., B30, 562 (1969).
[18] Vainstein, A. I., Khriplovich, I. B., Yadernaya Fizika, 13, 198, 1971.
[19] Boulware, A., Ann. Phys., 56, 140, 1970.
[20] Slavnov, A. A., Faddeev, L. D,, TMP*, 3, 18, 1970.
[21] Higgs, P. W., Phys. Lett., 12, 132, 1964.
[22] Englert. F., Brout, R., Phys. Rev., 13,321, 1964.
[23] Kibble, T. W. B., Phys. Rev., 155, 1554, 1967.
[24] Weinberg, S., Phys. Lett., 19, 1264, 1967.
[25] Salam, A., Elementary Particle Theory, N. Svartholm, (ed.), Stockolm, Almquist, Forlag AB, 1968.
[26] Hooft't G. Nucl., Phys., B35, 167, 1971.
[27] Slavnov, A. A., TMP., 10, 99, 1972.
[28] Slavnov, A. A., TMP., 13. 174, 1972.
[29] Taylor, J. C., Nucl. Phys., B33, 436, 1971.
[30] Lee, B. W., Zinn-Justin, J., Phys. Rev., D. 5, 3137, 1972.
[31] Hooft't G. Veltman, M., Nucl. Phys. B44, 189; B50, 318, 1972.
[32] Lee, B. W., Proceedings of the 14 International Conference on High Energy physics, Batavia, 1972.
[33] Illiopoulos, J., Proceedings of the 17 International Conference on High Energy Physics, London, 1974.
[34] Slavnov, A. A., Proceedings of the 18 International Conference on High Energy physics, Tbilisi, 1976.
[35] Ehresmann, Coll. top, Bruxelles, p. 29, 1950.
[36] Lischnerovich, A., Theory of Connections as a Whole and Holonomy Groups, Moscow, Inostrannaya Literature. 1960 (Russian

translation).
[37] Weyl, H., Z. f. Phys. 56, 330, 1929.
[38] Fock, V., Journ. de Physique, 10, 392. 1929.
[39] Polyakov, A. M., Lett. to JETP, 20, 430, 1974.
[40] Hooft't G., Nucl. Phys., B79, 2761, 1974.
[41] Faddeev, L. D., Preprint MPI-RAE/Pth München, 1974.
[42] Belavin, A. A., Polyakov, A. M., Tyupkin, Y., Schwarz, A. S., Phys. Lett., B59, 85, 1975.
[43] Feynmam, R. P., Rev. Mod. phvs., 20, 367, 1948.
[44] Feynmam, R. P., Phys. Rev., 80, 440, 1950.
[45] Faddeev, L. D., Les Houches Lecture, Session 20, North-Holland, 1976.
[46] Tobocman, W., Nuovo Cimento, 3, 1213, 1956.
[47] Berezin, F. A., The Method of Seconder Quantization, Moscow, Nauka, 1965.
[48] Zav'yalov, O. I., Thesis Math. Inst. Acad. Sci., Moscow, 1970.
[49] Schwinger, J., Phys. Rev., 75, 654, 1949.
[50] Schwinger, J., Proc. Nat. Acad. Sci., 37, 452, 1951.
[51] Slavnov, A. A., TMP. 22, 177, 1975.
[52] Zinn-Justin, J., Lecture Notes in Physics, 37, Berlin, Springer-Verlag.
[53] Dirac, P. A. M., Proc. Rey. Sci., A246, 1958.
[54] Dirac, P. A. M., Lectures on Quantum Mechanics, New York, Yeshiva University, 1964.
[55] Schwinger, J., Phys Rev., 125, 1043, 1962, 127, 324, 1962.
[56] Faddeev, L. D., TMP. I. 3, 1969.
[57] Feynman, R., Les Houches Lectures, North-Holland, 1977.
[58] Popov, V. N., Faddeev, L. D., Uspekhi Fiz. Nauk, 111, 427, 1973.
[59] Kramers, H. A., Rapports du 8^e Conseil Solvay, Bruxelles, 1950.
[60] Bethe, H. A., Phys. Rev., 72, 339, 1947.

[61] Bogolubov, N. N., Parasyuk, O. S., Doklady Akad. Nauk USSR, 55, 149, 1955; 100, 429 1955; Acta Math. 97, 227, 1957.

[62] Slavnov, A. A., TMP., 33, 210, 1977.

[64] Bollini, C. G., Giabidgi, J. T., Phys. Lett. B40, 566, 1972.

[65] Ashmore, J. F., Nuovo Cimento Lett., 4, 289, 1972.

[66] Ward, J. C., Phys. Rev., 77, 2931, 1950.

[67] Fradkin, E. S., JETP., 29, 288, 1955.

[68] Takahashi, Y., Nuovo Cimemto, 6, 370, 1957.

[69] Slavnov, A. A., Nucl. Phys., B97, 155, 1975.

[70] Becchi, C., Rouet, A., Stora, R. Comm. Math. Phys, 42, 127 1975.

[71] Lee, B. W., Phys. Lett., B46, 214, 1974; Phys. Rev., 9, 933, 1974.

[72] Becchi, C., Rouet, A., Stora, R., Renormalization Theory (G. Velo,; A. S. Wightman, eds.)—D. Reidel Publ. Co., 1976; Ann. Phys., 98, 287, 1976.

[73] Kallosh, R., Tyutin, I., Yadernaya Fizika, 17, 190, 1973.

[74] Adler, S. L., Phys. Rev., 177, 2426, 1969.

[75] Bell, S., Jackiw, R., Nuovo Cimento, A60, 47, 1969.

[76] Slavnov, A. A., TMP., 7, 13, 1971.

[77] Gross, D. J., Jackiw, R., Phys. Rev., D6, 477, 1972.

[78] Bouchiat, C., Illiopoulos, J., Meyer, P., Phys. Lett., B38, 519. 1972.

[79] Georgi, H., Glashow, S. L., Phys. Rev., D6, 429, 1977.

[80] Glashow, S. L., Illiopoulos, J., Maiani, L., Phys. Rev., D2,185, 1970.

[81] Greenberg, O. W., Phys. Lett., 13, 598, 1964.

[82] Bogolubov, N. N., Struminsky, B. V., Tavkhelidze, A. N., JINR Preprint D-1968, 1965.

[83] Han, M. Y., Nambu, Y., Phys. Rev., 139, B006, 1965.

[84] Pati. J., Salam, A., Phya. Rev., D8, 1240, 1973.

[85] Fritzsch, H., Gell-mann, M., Leutwyller, H., Phys. Lett., B47, 365, 1973.

[86] Weinberg, S., Phys. Rev., 31, 494, 1973.

[87] Stueckelberg, E. C. G., Peterman, A., Helv. Phys. Acta., 26, 499, 1953.

[88] Gell-mann, M., Low F., Phys. Rev., 95, 1300, 1954.

[89] Bogolubov, N. N., Shirkov, D. V., Doklady Akad. Nauk SSSR., 103, 203、391, 1955.

[90] Bogolubov, N. N., Shirkov, D. V., JETP., 30, 77; Nuovo Cimento,3, 845, 1956.

[91] Ovsyannikov, L. V., Doklady Akad. Nauk, 109, 112, 1956.

[92] Callan, C., Phys. Rev., D2, 1542, 1970.

[93] Symanzik, K., Comm. Math. Phys., 18, 227, 1970,

[94] Hooft't G., Report at the Conference on Lagrangian Field Theories, Marseille, 1972.

[95] Gross, D., Wilczek, F., Phys. Rev., D8, 3633, 1973.

[96] Politzer, H. D., Phys. Reports, C14, 129, 1974.

[97] Polyakov, A. M., Phys. Lett., B59, 82, 1975.

[98] Wilson, K., Erice Lectures, CNLS-321, 1975.

原文缺文献[63]。 ——译者

附录Ⅱ 记 号

(x, y) 是闵可夫斯基空间中的点，它们的时空分量分别为 $(\vec{x}, t)$、$(\vec{y}, s)$ 或者 $(\vec{x}, x_0)$、$(\vec{y}, y_0)$。

度规张量 $g^{\mu\nu}$ 取对角形式 $(1, -1, -1, -1)$。

规定所有的矢量都是协变的。分量为 a_μ、b_μ 的四维矢量 a、b 的标积为 $ab = a_\mu b_\mu = a_0 b_0 - (\vec{a}, \vec{b})$。四维矢量的分量以希腊字母标记，三维矢量的分量以拉丁字母标记。

除非另有说明，常数 $\hbar$ 和 c 都取为 1 。

译 后 记

本书是根据 1980 年出版的 **D. B. Pontecorvo** 译的英文本译出，并按照 1978 年出版的俄文原本进行过校勘。原书作者法捷耶夫和斯拉夫诺夫是在规范场量子理论的建立过程中作出过大量贡献的著名学者。他们写的这本书以非常精炼而系统的方式，阐述了规范场的量子化和重整化原理，具有鲜明的特色，是一本学习规范场量子理论的很好的入门书。

原书有些符号前后不统一，有些地方有印刷错误。凡是在译过程中能发现的，都按译者的认识水平作了改正，并在地方加了译者注，使读者了解原书的情况。

在本书的翻译过程中，承蒙雷式祖、蔡勖同志热情校阅，译者表示衷心的感谢！

由于译者水平有限，译文中错误不当之处在所难免，欢迎读者指正。

［Ｇｅｎｅｒａｌ Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝规范场的量子理论导引
作者＝［苏］法捷耶夫　斯拉夫诺夫
页数＝２１４
ＳＳ号＝１００７１５６６
出版日期＝